الرياضيات البحتة

الصف الثالث الثانوى   كتاب الطالب

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦

الاســـم : ....

الفــصل : ....

المدرســة: ....

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ / سيرافيم إلياس اسكندر

أ.د/ محمد حسين فهمى

أ / أسامة جابر عبد الحافظ

أ/ إبراهيم عبد اللطيف الصغير

مراجعة وتعديل

د/ محمد محى عبد السلام

أ / شريف عاطف البرهامى

أ/ ماجد محمد حسن

د / مدحت عطية شعراوى

د/ محمد عبد العاطى حجاج

أ/ سمير محمد سعداوى

أ/ عثمان مصطفى عثمان

إشراف علمى

أ/ منال عزقول - مستشار الرياضيات

إشراف تربوى

د/ أكرم حسن - رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

رقم الإيـــداع ٨٧٠٥ / ٢٠١٦

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 033 - 2

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

- يتضمن كتاب الرياضيات البحتة: الجبر والهندسة الفراغية - التفاضل والتكامل، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

وأخيرًا .نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

أولاً: الجــــبـر و الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى: نظرية ذات الحدين

١ - ١ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب ٤

١ - ٢ إيجاد الحد المشتمل على س ك من مفكوك ذات الحدين ١٣

١ - ٣ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين ١٨

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب ٢٤

٢ - ٢ نظرية ديموافر ٣٦

٢ - ٣ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ٤١

الوحدة الثالثة: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

٣ - ١ النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد ٤٨

٣ - ٢ المتجهات في الفراغ ٥٤

٣ - ٣ ضرب المتجهات ٦٣

الوحدة الرابعة: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

٤ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ ٨٠

٤ - ٢ معادلة المستوى فى الفراغ ٩٠

الجبر و الهندسة الفراغية

المحتويات

ثانياً: التفاضل والتكامل

متطلبات قبلية فى التفاضل والتكامل ١٠٤

الوحدة الأولى: الاشتقاق وتطبيقاته

١ - ١ الاشتقاق الضمنى والبارامترى ١٠٨

١ - ٢ المشتقات العليا للدالة ١١٣

١ - ٣ مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية ١١٧

١ - ٤ المعدلات الزمنية المرتبطة ١٢٨

الوحدة الثانية: سلوك الدالة ورسم المنحنيات

٢ - ١ تزايد وتناقص الدوال ١٣٨

٢ - ٢ القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى). ١٤٢

٢ - ٣ دراسة المنحنيات ١٤٨

٢ - ٤ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى ١٥٨

الوحدة الثالثة: التكامل المحدد وتطبيقاته

٣ - ١ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية ١٦٦

٣ - ٢ طرق التكامل ١٧٢

٣ - ٣ التكامل المحدد ١٨٢

٣ - ٤ تطبيقات على التكامل المحدد ١٨٩

أولاً: الجـــبر والهندسة الفراغية

الجبر

الوحدة الأولى

نظرية ذات الحدين
Binomial theorem

مقدمة الوحدة

وُلِد نصر الدين الطوسي (١٢٠١م - ١٢٧٤م) بجهرود، قُرب طوس الواقعة في إيران، من أسرة علم وفلسفة، تتلمذ على يدى كمال الدين الموصلى ومعين الدين المصرى، فدرس عليهما الحكمة والفلسفة وعلم الفلك والرياضيات، له باع طويل فى حساب عدد الإمكانات لحدوث الظواهر المختلفة، كما استخدم التباديل والتوافيق، وكان لكاردن (١٥٠١م -١٥٧٦م) اهتمامات فى حساب عدد الإمكانات بطريقة مبدأ العد الأساسى، مما أتاح له مجالاً كبيرًا فى معمارية الحاسوب (Computer Architecture) وهى عبارة عن تصميم وبنية العمليات الوظيفية للحاسوب، وتتناول هذه الوحدة مبدأ العد والعلاقة بين التباديل والتوافيق واستخداماتها فى حل بعض المشكلات الرياضية، وتعرف على نظرية ذات الحدين، وحل بعض التطبيقات الرياضية والحياتية عليها.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف نظرية ذى الحدين بأس صحيح موجب.
- يستنتج الحد العام فى مفكوك ذى الحدين.
- يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذى الحدين.
- يوجد معامل أى حد فى مفكوك ذى الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد.
- يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك $(س+ص)^{ن}$
- يوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$
- يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذى الحدين
- يوجد الحد الأوسط فى مفكوك ذى الحدين عندما ن عدد زوجى والحدان الأوسطان عندما ن عدد فردى.
- يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذى الحدين
- يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذى الحدين، ويستنتج بعض الأنماط فى مثلث باسكال.
- يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذى الحدين.

مصطلحات أساسية

- نظرية ذات الحدين *Binomial Theorem*

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

دروس الوحدة

الدرس (١ – ١): نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

الدرس (١ – ٢): إيجاد الحد المشتمل على س^ك من مفكوك ذات الحدين

الدرس (١ – ٣): النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

مخطط تنظيمي للوحدة

الوحدة الأولى

١ - ١ نظرية ذات الحدين بأسٍّ صحيح موجب

Binomial theorem for positive integer power

فكر و ناقش

نعلم أن:

(س + أ)^{١} = س + أ

(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢س أ + أ^{٢}

ويمكن استنتاج أن:

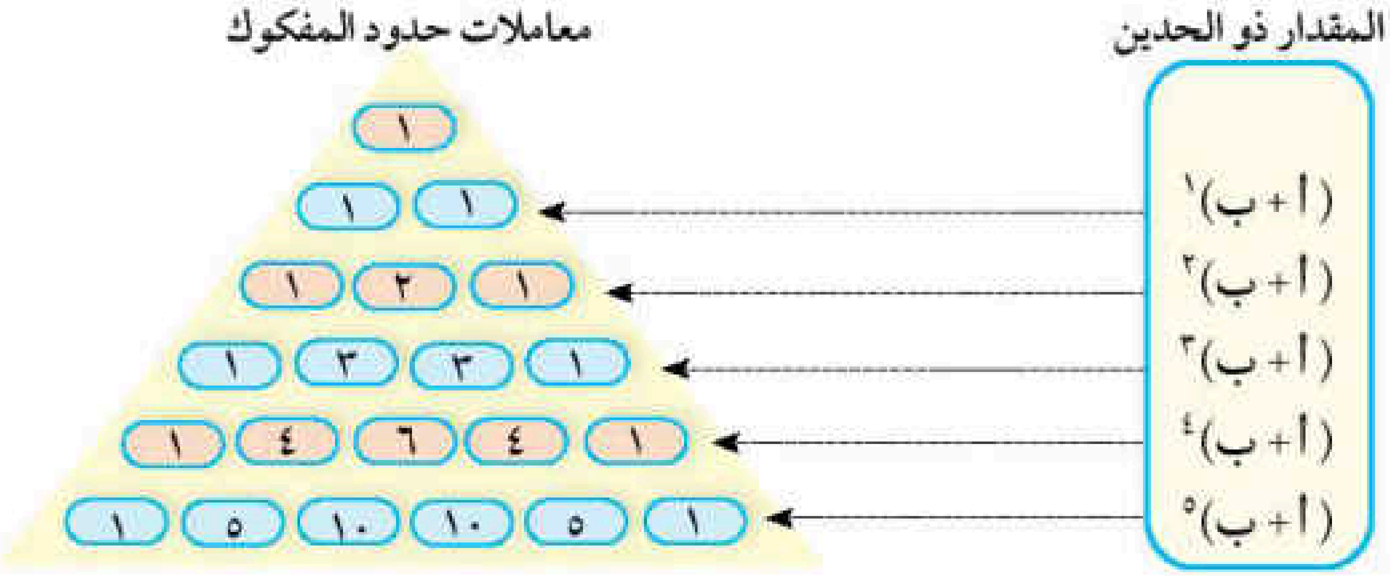
(س + أ)^{٣} = س^{٣} + ٣س^{٢} أ + ٣س أ^{٢} + أ^{٣}

(س + أ)^{٤} = س^{٤} + ٤س^{٣}أ + ٦س^{٢} أ^{٢} + ٤س أ^{٣} + أ^{٤}

- ما العلاقة بين عدد الحدود وقيمة الأس؟
- ما العلاقة بين قوى المتغيرين س ، أ فى كل حد من حدود المفكوك؟
- ماذا تلاحظ عن معاملات الحدود فى كل حدود المفكوك؟
- هل يمكن استخدام مثلث باسكال للتعبير عن المعاملات؟
- حاول استنتاج قاعدة إيجاد مفكوك (أ + ب)^{ن}

مثلث باسكال *Pascal triangle*

لاحظ أن: معاملات المفكوك تتبع نمطًا يمثله مثلث باسكال



- ويمكن كتابة عناصر مثلث باسكال باستخدام التوافيق كما فى الشكل التالى:

سوف تتعلم

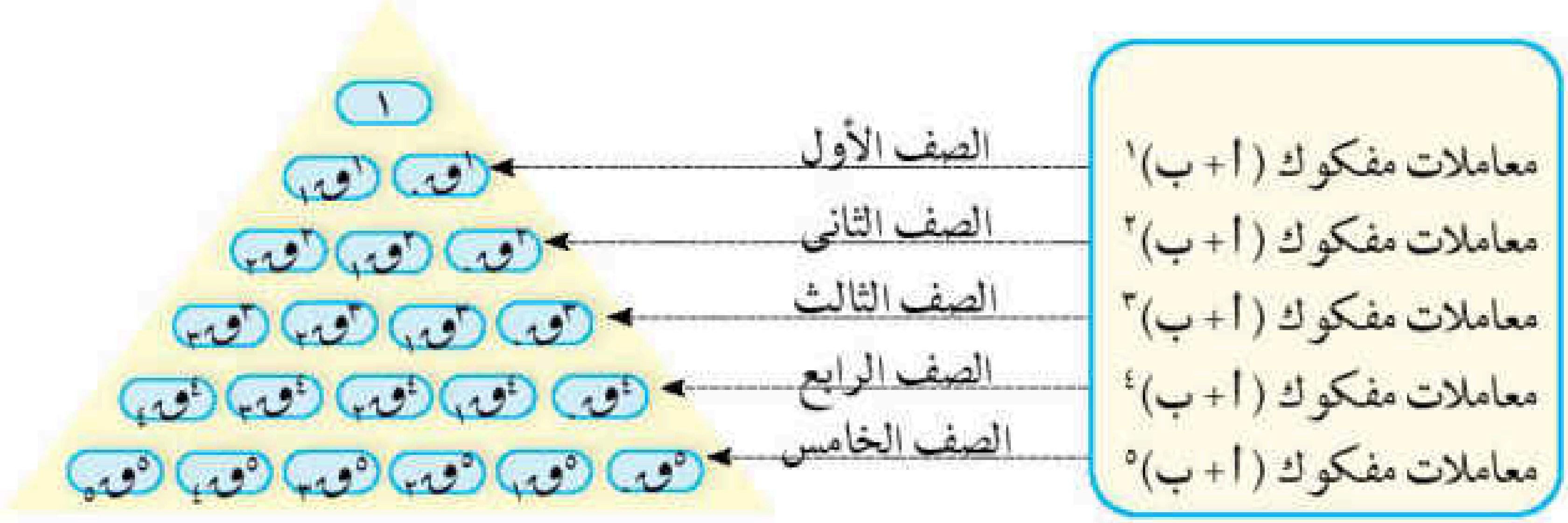
- الربط بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذى الحدين.
- الصورة العامة لمفكوك (س + أ)^{ن} حيث ن ∈ ص$^{+}$
- الصورة العامة للحد العام ح$_{ر+١}$ من مفكوك (س + أ)^{ن}
- رتبة وقيمة الحد الأوسط والحدين الأوسطين

مصطلحات أساسية

- مفكوك *The expansion*
- ذات حدين *Binomial*
- الحد العام *The general term*
- الحد الأوسط *The middle term*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*



بملاحظة الصف الثانى مثلا من مثلث باسكال نلاحظ أن ١، ٢، ١ تمثل $^{2}\text{ق}_{0}$، $^{2}\text{ق}_{1}$، $^{2}\text{ق}_{2}$ على الترتيب وأن مجموع هذه العناصر $^{2}\text{ق}_{0}$، $^{2}\text{ق}_{1}$، $^{2}\text{ق}_{2}$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى على عنصرين حيث

$^{2}\text{ق}_{0} + {}^{2}\text{ق}_{1} + {}^{2}\text{ق}_{2} = ٤ = ٢^{٢}$

١
١ ١
١ ٢ ١

المجموعة {س ، ص} مجموعاتها الجزئية ϕ ، {س} ، {ص}، {س ، ص}

وبالمثل فإن: مجموع عناصر الصف الثالث

$^{3}\text{ق}_{0}$، $^{3}\text{ق}_{1}$ ، $^{3}\text{ق}_{2}$ ، $^{3}\text{ق}_{3}$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التى نحصل عليها من مجموعة تحتوى على ٣ عناصر وعدد هذه المجموعات ٨ = $٢^{٣}$

أى $^{3}\text{ق}_{0} + {}^{3}\text{ق}_{1} + {}^{3}\text{ق}_{2} + {}^{3}\text{ق}_{3} = ٢^{٣}$

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١

وعلى وجه العموم إذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها ن فإن عدد المجموعات الجزئية التى يمكن الحصول عليها منها = $٢^{ن}$ أي $^{ن}\text{ق}_{0} + {}^{ن}\text{ق}_{1} + {}^{ن}\text{ق}_{2} + \dots + {}^{ن}\text{ق}_{ن} = ٢^{ن}$

تعبير شفهى: بالاستعانة بمثلث باسكال

١) أوجد معاملات (أ + ب)^{٦} على صورة توافيق. ٢) أوجد معاملات (أ + ب)^{٥} على صورة توافيق.

تعلم

مفكوك ذى الحدين

إذا كان أ ، س $\in$ ع ، ن $\in$ ص$^{+}$ يكون:

١- $(س + أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}\text{ق}_{1}\, س^{ن-1} أ + {}^{ن}\text{ق}_{2}\, س^{ن-2} أ^{2} + \dots + أ^{ن}$

٢- $(س - أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}\text{ق}_{1}\, س^{ن-1} أ + {}^{ن}\text{ق}_{2}\, س^{ن-2} أ^{2} - \dots + (-أ)^{ن}$

ملاحظات على مفكوك ذى الحدين $(س + أ)^{ن}$

١) عدد حدود المفكوك (ن + ١) حدًا

٢) المفكوك مرتب حسب قوى س تنازليًا ومرتب حسب قوى أ تصاعديًا.

٣) مجموع قوى س وقوى أ فى أى حد يساوى ن.

٤) دليل ق فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحدًا صحيحًا عن رتبة ذلك الحد .

مثال

كتابة مفكوك ذات الحدين

(١) اكتب مفكوك $(\text{٢س} + \text{٣ص})^{٤}$

الحل

$$(\text{٢س} + \text{٣ص})^{٤} = (\text{٢س})^{٤} + {}^{٤}\text{ق}_{١}(\text{٢س})^{٣}(\text{٣ص}) + {}^{٤}\text{ق}_{٢}(\text{٢س})^{٢}(\text{٣ص})^{٢} + {}^{٤}\text{ق}_{٣}(\text{٢س})(\text{٣ص})^{٣} + (\text{٣ص})^{٤}$$

$$= \text{١٦}\,\text{س}^{٤} + \text{٩٦}\,\text{س}^{٣}\text{ص} + \text{٢١٦}\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{٢١٦}\,\text{س}\,\text{ص}^{٣} + \text{٨١}\,\text{ص}^{٤}$$

حاول أن تحل

(١) اكتب مفكوك:

أ) $(\text{٣س} + \text{ص})^{٥}$ ب) $(\text{س}^{٢} - ١)^{٦}$

حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين:

أ) $(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + \dots + \text{س}^{\text{ن}}$

ب) $(١ - \text{س})^{\text{ن}} = ١ - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} - \dots + (-\text{س})^{\text{ن}}$

مثال

(٢) اكتب مفكوك $(١ + \text{س})^{٦}$، ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة عددية للمقدار: ${}^{٦}\text{ق}_{٠} + {}^{٦}\text{ق}_{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٢} + \dots + {}^{٦}\text{ق}_{٦}$

الحل

$$(١ + \text{س})^{٦} = ١ + {}^{٦}\text{ق}_{١}\text{س} + {}^{٦}\text{ق}_{٢}\text{س}^{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٣}\text{س}^{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٤}\text{س}^{٤} + {}^{٦}\text{ق}_{٥}\text{س}^{٥} + \text{س}^{٦}$$

بوضع س = ١ فى الطرفين

$$(١ + ١)^{٦} = ١ + {}^{٦}\text{ق}_{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٣} + \dots + ١$$

$$٢^{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٠} + {}^{٦}\text{ق}_{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٣} + \dots + {}^{٦}\text{ق}_{٦}$$

الحد العام من مفكوك ذات الحدين

The general term of the expansion of binomial

فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ص} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{ص}^{٢} + \dots + \text{ص}^{\text{ن}}$

لاحظ أن $\text{ح}_{٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ص}^{١}$ ، $\text{ح}_{٣} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{ص}^{٢}$

وبالمثل يكون: $\text{ح}_{٩} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٨}\,\text{س}^{\text{ن}-٨}\,\text{ص}^{٨}$

وبفرض الحد العام $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ حيث $٠ < \text{ر} < \text{ن}$ فإن حيث $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}}\,(\text{ص})^{\text{ر}}$$

مثال

(٣) من مفكوك $(س + \frac{٢}{س})^{٨}$ أوجد معامل الحد السادس

الحل

$ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥} (س)^{٣} (\frac{٢}{س})^{٥} = {}^{٨}ق_{٥} \times ٢^{٥} س^{-٢} = ١٧٩٢ س^{-٢}$

ومعامل هذا الحد = ١٧٩٢

لاحظ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (معامل الحد الأول)$^{ن-ر}$ (معامل الحد الثانى)^{ر}

حاول أن تحل

(٢) فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢})^{٧}$، أوجد كل من $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ حسب قوى س التنازلية، و إذا كان $ح_{٣} = ح_{٧}$ ، أوجد قيمة س

مثال

(٤) من مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ ، أوجد الحد العاشر من النهاية.

الحل

الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ هو الحد العاشر من البداية فى مفكوك $(\frac{-١}{٢س} + ٣س^{٢})^{١٣}$

$ح_{١٠} = {}^{١٣}ق_{٩} (\frac{-١}{٢س})^{٤} (٣س^{٢})^{٩} = \frac{٧١٥ \times ٣^{٩}}{٢^{٤}} س^{١٤}$

حل آخر

لاحظ أنه يمكن حساب رتبة الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٣}$، وتكون رتبته مساوية

$١٤ - ١٠ + ١ = ٥$

ويكون $ح_{١٠}$ من النهاية هو $ح_{٥}$ من البداية $\quad ح_{٥} = {}^{١٣}ق_{٤} (٣س^{٢})^{٩} (\frac{-١}{٢س})^{٤} = \frac{٧١٥ \times ٣^{٩}}{٢^{٤}} س^{١٤}$

حاول أن تحل

(٣) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٣س^{٢}})^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية:

قاعدة

١) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$

٢) $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$ من حدود $(س + أ)^{ن}$

مثال

(٥) أوجد فى ابسط صورة $(س + ٢)^{٦} + (س - ٢)^{٦}$

الحل

$(س + ٢)^{٦} + (س - ٢)^{٦} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ح_{٧})$

$= ٢ (س^{٦} + {}^{٦}ق_{٢} س^{٤} \times ٢^{٢} + {}^{٦}ق_{٤} س^{٢} \times ٢^{٤} + ٢^{٦}) = ٢ (س^{٦} + ٦٠س^{٤} + ٢٤٠ س^{٢} + ٦٤)$

حاول أن تحل

(٤) أوجد فى أبسط صورة $(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥}$

مثال

(٦) من مفكوك $(٣ + س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١}\,(٣ + س)^{١٠}\,(١ - ٢س) + {}^{١١}ق_{٢}\,(٣ + س)^{٩}\,(١ - ٢س)^{٢} - \ldots\ldots - (١ - ٢س)^{١١}$

أوجد الحد الخامس حسب قوى س التصاعدية.

الحل

المقدار يمثل مفكوك $[(٣ + س) - (١ - ٢س)]^{١١} = (٢ + ٣س)^{١١}$

ويكون:

$ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤}\,(٢)^{٧}\,(٣س)^{٤} = ٣٣٠ \times ٢^{٧} \times ٣^{٤}\,س^{٤} = ٣٤٢١٤٤٠\,س^{٤}$

حاول أن تحل

(٥) من مفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤\,س\,(١ - س)^{٧} + ٢٥٢\,س^{٢}\,(١ - س)^{٦} + \ldots\ldots + ٦٥٦١\,س^{٨}$ ، أوجد القيمة العددية للحد السادس حسب قوى س التصاعدية عندما س = ٢

مثال

(٧) إذا كان $(١ + جـ\,س)^{ن} = ١ + ٢٠\,س + أ_{١}\,س^{٢} + أ_{٢}\,س^{٣} + \ldots + أ_{ن-١}\,س^{ن}$

وكان $١٦\,أ_{١} = ٣\,أ_{٢}$ أوجد قيمة كل من ن، جـ حيث جـ $\neq ٠$

الحل

$(١ + جـ\,س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\,جـ\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,جـ^{٢}\,س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,جـ^{٣}\,س^{٣} + \ldots\ldots$

$\therefore {}^{ن}ق_{١}\,جـ = ٢٠$ $\qquad \therefore ن\,جـ = ٢٠$ $\qquad \therefore جـ = \frac{٢٠}{ن}$ (١)

$\because ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢}\,جـ^{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣}\,جـ^{٣}$ $\qquad \therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣}\,جـ$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) $\qquad \therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} \times \frac{٢٠}{ن}$

$\therefore ١٦\,ن = ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} \times ٢٠$ $\qquad \therefore ١٦ن = ٣ \times \frac{ن - ٢}{٣} \times ٢٠$ $\qquad \therefore ن = ١٠$

بالتعويض فى المعادلة (١) $\qquad \therefore جـ = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$

حاول أن تحل

(٦) من مفكوك $(١ + جـ\,س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠، وكان الحد الخامس يساوى ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ عدد صحيح موجب.

مثال

(٨) (أ) أثبت أن $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن}{ر}$

(ب) إذا كانت النسبة بين $ع_{6}$ من مفكوك $(س + \frac{1}{س})^{15}$، $ع_{5}$ من مفكوك $(س - \frac{1}{س^{2}})^{14}$ تساوى $\frac{8}{9}$ أوجد قيمة س

الحل

$$ {}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \; \lfloor ن-ر} \times \frac{\lfloor ر-1 \; \lfloor ن-1-ر+1}{\lfloor ن-1} = \frac{ن \; \lfloor ن-1 \; \lfloor ر-1}{ر \; \lfloor ر-1 \; \lfloor ن-1} = \frac{ن}{ر} $$

$$ \frac{ع_{6} \text{ من } (س + \frac{1}{س})^{15}}{ع_{5} \text{ من } (س - \frac{1}{س^{2}})^{14}} = \frac{{}^{15}ق_{5} \, س^{10} \, (\frac{1}{س})^{5}}{{}^{14}ق_{4} \, س^{10} \, (\frac{-1}{س^{2}})^{4}} = \frac{8}{9} $$

$\therefore 3س^{3} = \frac{8}{9} \quad \therefore س^{3} = \frac{8}{27} \quad \therefore س = \frac{2}{3}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ *The middle term*

فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ نجد أن عدد حدود المفكوك = ن + ١

أولًا: إذا كانت ن عددًا زوجيًا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد فردي، و يوجد للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته $\frac{ن + 2}{2} = (\frac{ن}{2} + 1)$

ثانيًا: إذا كانت ن عددًا فرديًا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد زوجى، و يوجد للمفكوك حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{ن+1}{2}$ ، $\frac{ن+3}{2}$

مثال

(٩) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(2س + \frac{1}{2س^{2}})^{12}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{12}{2} + 1 = 7$

$$ ع_{7} = {}^{12}ق_{6} (2س)^{6} \left(\frac{1}{2س^{2}}\right)^{6} = {}^{12}ق_{6} (2)^{6} (\frac{1}{2})^{6} س^{6} س^{-12} = {}^{12}ق_{6} س^{-6} $$

حاول أن تحل

(٧) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{2س})^{10}$ ، و إذا كانت قيمة هذا الحد = $\frac{28}{27}$ أوجد قيمة س

مثال

(١٠) أوجد الحدين الأوسطين فى مفكوك $(\frac{س^{2}}{3} + \frac{3}{س})^{15}$

الحل

رتبة الحدين الأوسطين تساوى $\frac{15 + 1}{2}$ والذى يليه أى $ع_{8}$ ، $ع_{9}$

$ع_{٨} = {}^{١٥}ق_{٧} \left(\frac{س^{٢}}{٣}\right)^{٨} \left(\frac{٣}{س}\right)^{٧} = {}^{١٥}ق_{٧} \times ٣^{-٨+٧} \times س^{١٦-٧} = {}^{١٥}ق_{٧} \times \frac{١}{٣} س^{٩} = ٢١٤٥ س^{٩}$

$ع_{٩} = {}^{١٥}ق_{٨} \left(\frac{س^{٢}}{٣}\right)^{٧} \left(\frac{٣}{س}\right)^{٨} = {}^{١٥}ق_{٨} \times ٣^{٨-٧} \times س^{١٤-٨} = {}^{١٥}ق_{٨} \times ٣ س^{٦} = ١٩٣٠٥ س^{٦}$

حاول أن تحل

(٨) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

مثال

(١١) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٣ + ٢س)^{٨} + (٣ - ٢س)^{٨}$

الحل

المفكوك $= ٢ (ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ع_{٧} + ع_{٩})$

$\therefore$ الحد الأوسط $= ٢ع_{٥}$

$= ٢ \times {}^{٨}ق_{٤} (٣)^{٤} (٢س)^{٤} = ١٨١٤٤٠ س^{٤}$

حاول أن تحل

(٩) أوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين من مفكوك $\left(٢\sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠} + \left(٢\sqrt{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠}$

تمــارين (١ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان رتبتا الحدان الأوسطان في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هما ٨،٧ فإن ن تساوي:

(أ) ١٣ (ب) ١٥

(جـ) ١٦ (د) ٥٦

(٢) إذا كان $١ + ٥س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... + س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن س تساوي:

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ١٠ (د) ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٧}$ يساوي:

(أ) $٢^{٧}$ (ب) $٢^{٥}$

(جـ) $٢^{٦}$ (د) صفر

④ معامل الحد الخامس من مفكوك $(1 + 2س)^{10}$.

Ⓐ $16\ {}^{10}ق_{5}$ Ⓑ $\frac{1}{16}\ {}^{10}ق_{5}$

Ⓙ $16\ {}^{10}ق_{4}$ Ⓓ $\frac{1}{16}\ {}^{10}ق_{4}$

⑤ فى مفكوك ذى الحدين إذا كان الحد العام هو ${}^{12}ق_{ر}\ س^{24-4ر}$ يكون الحد المشتمل على $س^{12}$ هو:

أ $ح_3$ ب $ح_4$

ج $ح_5$ د لايوجد

⑥ إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + 2ب)^{2ن+1}$ متساويين فإن:

أ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{2}$ ب $أ = 4ب$

ج $أ = 8ب$ د $أ = 2ب$

⑦ إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $(\frac{أ^2}{2} + \frac{ب}{أ})^{8ن}$ هو الحد التاسع فإن ن تساوى:

أ ١   ب ٢

ج ٣   د ٤

⑧ فى مفكوك $(1 + ب\,س)^{9}$ يكون معامل الحد السادس هو:

أ ${}^{9}ق_{5}$ ب ${}^{9}ق_{6}$

ج ${}^{9}ق_{5}\ ب^{5}$ د ${}^{9}ق_{6}\ ب^{6}$

⑨ فى مفكوك ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة:

أ $(أ - ب)^{12}$ ب $(أ - ب)^{13}$

ج $(أ + ب)^{12}$ د $(أ - ب)^{13}$

ثانيًا : أجب عما يأتى:

⑩ إذا كان $1 + 8س + {}^{8}ق_{2}\ س^{2} + \ldots + س^{8} = 256$ أوجد قيمة س

⑪ أوجد قيمة س التى تحقق $(1 + \sqrt{3})^{6} - (1 - \sqrt{3})^{6} = 480\sqrt{3}\,س$

⑫ باستخدام المفكوك : $(1 + س)^{10} = 1 + {}^{10}ق_{1}\,س + {}^{10}ق_{2}\,س^{2} + \ldots + س^{10}$ أثبت أن:

أ $1 + {}^{10}ق_{1} + {}^{10}ق_{2} + \ldots + {}^{10}ق_{10} = 2^{10}$ ب $1 - {}^{10}ق_{1} + {}^{10}ق_{2} - \ldots + {}^{10}ق_{10} =$ صفر

⑬ اكتب مفكوك كلًّا من :

أ $(\frac{2}{س} + \frac{س}{2})^{4}$ ب $(س - \frac{1}{س})^{5}$

ج $(س + \sqrt{2})^{4} + (س - \sqrt{2})^{4}$ د $(\sqrt{3} + 2س)^{5} - (\sqrt{3} - 2س)^{5}$

(١٤) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ع_٣ = ٢٨س^٢$ ، $ع_٥ = ١١٢٠$ أوجد قيمة كل من: ن، س

(١٥) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة ن.

(١٦) من مفكوك $(أ س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معامل $ع_٦ = \frac{٦٣}{٨}$ اثبت ان ٢ أب = ١

(١٧) من مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد الحد الأوسط.

(١٨) من مفكوك $(\frac{س^٢}{٢} - \frac{٢}{س})^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين.

(١٩) من مفكوك $س^٤ (س - \frac{١}{س})^٩$ حسب قوى س التنازلية، أوجد الحد الرابع من النهاية.

(٢٠) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$ فأوجد قيمة س.

(٢١) أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٠}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما س = ٣

(٢٢) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{١}{س^٢})^{١٤}$ تساوى -١٦ : ١٥ أوجد قيمة س

١ - ٢

إيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ من مفكوك ذات الحدين

Finding the term contain x^R in the expansion of binomial

فكر و ناقش

تعلمنا فى الدرس السابق أن :

$$(\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}})^{٢٠} = (\text{س}^{٢})^{٢٠} - {}^{٢٠}\text{ق}_{١}(\text{س}^{٢})^{١٩}(\frac{١}{\text{س}^{٢}}) + {}^{٢٠}\text{ق}_{٢}(\text{س}^{٢})^{١٨}(\frac{١}{٢}\text{س})^{٢}$$
$$- {}^{٢٠}\text{ق}_{٣}(\text{س}^{٢})^{١٧}(\frac{١}{\text{س}^{٢}})^{٣} + \ldots + (\frac{-١}{\text{س}^{٢}})^{٢٠}$$

هل من السهل أن نُوجِد الحد المشتمل على $\text{س}^{١٦}$ أو $\text{س}^{٢٤}$ أو الحد الخالى من س أو بدون الاسترسال فى كتابة حدود المفكوك؟

نجد أن طريقة البحث بإيجاد المفكوك تكون شاقة؛ ولهذا لإيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ من المفكوك نتبع الآتى :

١- نفترض أن هذا الحد هو الحد العام $\text{ع}_{\text{ر}+١}$ ونوجد هذا الحد بدلالة ر.

٢- نوجد مجموع قوى س فى الحد العام بدلالة ر ونضع هذا المجموع مساويًا للقوة المطلوبة ك، ومنها نوجد ر التى تحقق احتواء هذا الحد على القوة المطلوبة ك ولدينا:

أ) ر $\in$ ط يكون ر + ١ هو الحد المطلوب.

ب) ر $\notin$ ط لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك.

فى حالة البحث عن الحد الخالى من س نضع مجموع قوى س من الحد العام = صفر

مثال

١) من مفكوك $(\frac{٣\text{س}}{٢} + \frac{٢}{٣\text{س}})^{١١}$ أوجد معامل س فى هذا المفكوك .

الحل

$$\text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}(\frac{٣\text{س}}{٢})^{١١-\text{ر}}(\frac{٢}{٣\text{س}})^{\text{ر}} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}(\frac{٣}{٢})^{١١-\text{ر}}(\frac{٢}{٣})^{\text{ر}}\text{س}^{١١-٢\text{ر}}$$

وبمقارنة القوى $\text{س}^{١١-٢\text{ر}} = \text{س}^{١}$

$١١ - ٢\text{ر} = ١$ $\text{ر} = ٥$

الحد المطلوب هو الحد السادس.   معامل $\text{ع}_{٦} = {}^{١١}\text{ق}_{٥}(\frac{٣}{٢})^{٦}(\frac{٢}{٣})^{٥} = ٦٩٣$

سوف تتعلم

- استخدام الحد العام فى إيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ والحد الخالى من س .
- إيجاد معامل الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ من المفكوك .
- إيجاد معامل أكبر قوة لـ س.

مصطلحات أساسية

- حد عام — General term
- حد خالٍ من س — term Free of x
- أكبر قوة — Heightest power
- معامل حد — Coefficient

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
Scientific calculator

حاول أن تحل

(١) أوجد معامل $س^{٨}$ في مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س})^{١٢}$

مثال

(٢) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٢س^{٢}})^{٩}$ أوجد:

(أ) معامل $س^{٣}$ (ب) الحد الخالي من س

(جـ) أثبت أن المفكوك لا يحتوي على حد يشتمل على $س^{٢}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٢س)^{٩-ر} (\frac{-١}{٢س^{٢}})^{ر} = {}^{٩}ق_{ر} (-١)^{ر} (٢)^{٩-٢ر} س^{٩-٣ر}$

(أ) لإيجاد معامل $س^{٣}$

$س^{٩-٣ر} = س^{٣}$ $\quad ٩ - ٣ر = ٣$ $\quad ر = ٢$

الحد الثالث يحتوي على $س^{٣}$

معامل $ح_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} \times ٢^{٥} = ٣٦ \times ٣٢ = ١١٥٢$

(ب) لإيجاد الحد الخالي من س $\quad ٩ - ٣ر = صفر$ $\quad ر = ٣$

الحد المطلوب هو $ح_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} (-١)^{٣} (٢)^{٣} = -٦٧٢$

(جـ) بوضع $٩ - ٣ر = ٢$ $\quad \therefore ٧ = ٣ر$ $\quad \therefore ر = \frac{٧}{٣} \notin ط$

$\therefore$ هذا المفكوك لا يشتمل على $س^{٢}$

حاول أن تحل

(٢) (أ) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$

(ب) أوجد معامل $س^{-١٠}$ في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س^{٢}})^{١٥}$

(جـ) من مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع، أثبت أن $٦ أ ب = ٥$

مثال

(٣) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا أثبت أنه لا يوجد حدٌّ خالٍ من س من مفكوك $(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ إلا عندما ن مضاعف للعدد ٧ ثم أوجد هذا الحد في حالة ن = ٧

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (س^{٥})^{ن-ر} (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} = {}^{ن}ق_{ر}\ س^{٥ن-٧ر}$

$س^{٥ن-٧ر} = س^{صفر}$ $\quad ٥ن - ٧ر = صفر \quad ر = \frac{٥ن}{٧} \in ط$

$\frac{٥ن}{٧} \in ط$ عندما ن مضاعف للعدد ٧

عندما ن = ٧ $\quad \therefore ر = ٥ \quad$ الحد الخالى من س هو $ح_{٦}$

$ح_{٦} = {}^{٧}ق_{٥} = ٢١$

حاول أن تحل

(٣) من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد:

(أ) معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$

(ب) إذا كانت ن = ٦، أوجد النسبة بين معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط

مثال

(٤) من مفكوك $(٢ + \frac{س}{٣})^{٩}$ أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

الحل

رتبة الحدين الأوسطين $\frac{٩+١}{٢}$ والذى يليه أى $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

$\because ح_{٥} = ح_{٦} \quad \therefore {}^{٩}ق_{٤} (٢)^{٥} (\frac{س}{٣})^{٤} = {}^{٩}ق_{٥} (٢)^{٤} (\frac{س}{٣})^{٥}$

$٢ = \frac{س}{٣} \quad \therefore س = ٦$

تمارين الدرس (١ - ٢)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) الحد المشتمل على $س^{٤}$ فى مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ يساوى:

(أ) ${}^{١٠}ق_{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٦}\ {}^{١٠}ق_{٤}$ (ج) $١٦\ {}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $٣٢ \times {}^{١٠}ق_{٥}$

(٢) فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ يكون الحد الخالى من س هو:

(أ) $ح_{٤}$ (ب) $ح_{٥}$ (ج) $ح_{٦}$ (د) لايوجد حد خال من س

(٣) فى مفكوك $س^{٣} (١ + س)^{٧}$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^{٤}$ هو:

(أ) ${}^{٧}ق_{٤}$ (ب) ${}^{٧}ق_{٣}$ (ج) ${}^{٧}ق_{١}$ (د) ٢١

(٤) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{٢}{س})^{٦}$ يكون الحد الخالى من س هو الحد

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (ج) الخامس. (د) لا يوجد حد خال من س

(٥) فى مفكوك $(أس^{٢} + \frac{١}{أس})^{١١}$ إذا كان معاملا $س^{٤}$، $س^{٧}$ متساويين فإن أ =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ±١ (د) ±٢

(٦) إذا كان الحد الخال من س فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{ن}$ هو $ح_{٧}$ فإن ن =

(أ) ٦ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ٨

(٧) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{أس})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^{٧}$ فإن أ =

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (ج) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٨) فى مفكوك $(أ\,س + \frac{١}{ب\,س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوى معامل الحد السابع فإن:

(أ) $أ\,ب = \frac{٦}{٥}$ (ب) $أ\,ب = \frac{٥}{٦}$ (ج) $أ\,ب = \frac{٣٦}{٢٥}$ (د) $أ\,ب = \frac{٢٥}{٣٦}$

(٩) الحد الخالى من س فى مفكوك $(٢\,س + \frac{١}{٢س})^{٨}$

(أ) ٣٥ (ب) ١٤٠ (ج) ٧٠ (د) ٥٦

(١٠) فى مفكوك $(١ + أ\,س)^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{٥} = ٥٦٠$ فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ±٢ (د) ±٤

اجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) فى مفكوك $(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد الحد الخالى من س

(١٢) أوجد معامل $س^{١٢}$ فى مفكوك $س^{٢}(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١٥}$

(١٣) إذا كان الحد السادس فى مفكوك $(٢\,س - \frac{١}{س^{٣}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س، أوجد قيمة ن، ثم ابحث هل احد حدود هذا المفكوك يشتمل على $س^{-٦}$ أم لا؟

(١٤) فى مفكوك $(٢\,س - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$ أوجد :

أولًا: معامل $س^{٣}$ **ثانيًا:** الحد الخالى من س

ثالثًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على $س^{٢}$

(١٥) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ وإذا كانت النسبة بين معامل $ح_{١١}$ فى مفكوك $(١ + س^{٢})^{ن}$ ومعامل $ح_{١٠}$ فى مفكوك $(١ - ص)^{ن-١}$ تساوى -٣ : ٢ أوجد قيمة ن.

(١٦) أوجد معامل $(\frac{س}{ص})^{٤}$ من مفكوك $(\frac{٢س}{ص} + \frac{ص}{٢س})^{١٠}$

(١٧) أوجد معامل $س^{ن}$ فى مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$، ثم أثبت أنه يساوى ضعف معامل $س^{ن}$ من مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$

(١٨) فى مفكوك $(س + \frac{1}{س})^{2ن}$ أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨

(١٩) فى مفكوك $(س^{ك} + \frac{1}{س})^{6}$ حيث ك عدد صحيح موجب .أوجد :

أولا: قيمة ك التى تجعل للمفكوك حدًّا خاليًا من س

ثانيًا: النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التى حصلت عليها من أولًا.

(٢٠) فى مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{أس})^{12}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل $س^{3}$ من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ ، أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما س = ٢.

(٢١) فى مفكوك $(2س^{3} + \frac{أ}{س^{2}})^{10}$ إذا كان معامل $س^{5}$ يساوى معامل $س^{15}$ أوجد قيمة أ.

(٢٢) فى مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{8س})^{13}$ حسب قوى س التنازلية :

أولًا: أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س

ثانيًا: إذا كان $ح_{4} = ح_{11}$ أوجد قيمة س

(٢٣) فى مفكوك $(س + \frac{1}{س^{2}})^{9}$ أوجد:

أولًا: رتبة وقيمة الحد الخالى من س

ثانيًا: قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك يساوى صفر.

(٢٤) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $(9س^{2} + \frac{1}{3س})^{9}$، ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢٥) فى مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{س})^{3ن}$ اثبت أن الحد الخالى من س يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{3ن}$ ، و إذا كانت ن = ٦ فاوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط.

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

سوف تتعلم
- إيجاد النسبة بين حدين متتاليين.
- إيجاد النسبة بين معاملي حدين متتاليين.

مصطلحات أساسية
- حدان متتاليان *Consecutive terms*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

من مفكوك $(س + أ)^{ن}$ وبفرض أن الحدين المتتاليين هما $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{{}^{ن}ق_{ر}\,(س)^{ن-ر}\,(أ)^{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}\,(س)^{ن-ر+١}\,(أ)^{ر-١}}$$

$$= \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} \times \frac{أ}{س}$$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}}{\underline{|ن}} \times \frac{أ}{س}$$

$$= \frac{\underline{|ر-١}\ (ن-ر+١)\ \underline{|ن-ر}}{ر\ \underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر}} \times \frac{أ}{س}$$

$$\boxed{\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}}}$$

ويكون : $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}}$

مثال

(١) من مفكوك $(س + ٢ص)^{١٢}$ أوجد كلًّا من :

(أ) $\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$ (ب) $\frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٨}}$ (ج) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٤}}$ (د) $\frac{\text{معامل } ح_{٨}}{\text{معامل } ح_{٦}}$

الحل

(أ) $\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{١٢-٢+١}{٢} \times \left(\frac{٢ص}{س}\right)$

$= \frac{١١}{٢} \times \frac{٢ص}{س} = \frac{١١ص}{س}$

(ب) $\frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٨}} = \frac{٧}{١٢-٧+١} \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{١٢}$

(ج) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٤}} = \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} \times \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}}$

$= \frac{١٢-٥+١}{٥} \times \left(\frac{٢ص}{س}\right) \times \frac{١٢-٤+١}{٤}\left(\frac{٢ص}{س}\right)$

$= \frac{٨}{٥} \times \frac{٢ص}{س} \times \frac{٩}{٤} \times \frac{٢ص}{س} = \frac{٧٢\,ص^{٢}}{٥\,س^{٢}}$

د) $\frac{\text{معامل } ح_٨}{\text{معامل } ح_٦} = \frac{\text{معامل } ح_٨}{\text{معامل } ح_٧} \times \frac{\text{معامل } ح_٧}{\text{معامل } ح_٦}$

$= \frac{١٢ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{٢}{١} \times \frac{١٢ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٢}{١}$

$= \frac{٦}{٧} \times \frac{٢}{١} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{٢}{١} = ٤$

حاول أن تحل

١) من مفكوك $(س^٢ + \frac{٢}{س})^٨$

أولاً: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس، و إذا كانت هذه النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة س

ثانيًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

مثال

٢) من مفكوك $(س + ص)^٨$ إذا كان $٢ ح_٥ = ح_٤ + ح_٦$ أوجد $\frac{س}{ص}$ عدديًا.

الحل

$ح_٤ + ح_٦ = ٢ح_٥$ بالقسمة على $ح_٥$ 　　 $\frac{ح_٤}{ح_٥} + \frac{ح_٦}{ح_٥} = ٢$

$\frac{٤}{٨ - ٤ + ١}(\frac{س}{ص}) + \frac{٨ - ٥ + ١}{٥}(\frac{ص}{س}) = ٢$ 　　 $\frac{٤س}{٥ص} + \frac{٤ص}{٥س} = \frac{٢}{١}$ 　 **بالضرب** × ٥ س ص

$٤س^٢ + ٤ص^٢ = ١٠ س ص$ 　　 $٤س^٢ - ١٠ س ص + ٤ص^٢ = $ صفر ÷ ٢

$٢س^٢ - ٥ س ص + ٢ ص^٢ = ٠$ 　　 $(٢ س - ص)(س - ٢ ص) = ٠$

$٢ س = ص$ 　　 $س = ٢ ص$

$\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢}$ 　 أو 　 $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{١}$

حاول أن تحل

٢) من مفكوك $(\sqrt{٦ س} + \frac{١}{س})^٨$ إذا كان $ح_٤ ، ح_٥ ، ٢٥ح_٧ ، ح_٦$ متناسبة أوجد قيمة س

مثال

٣) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(١ + س)^ن$ هى ٣٥ ، ٢١، ٧ حسب قوى س التصاعدية، أوجد قيمة كل من ن و رتب الحدود الثلاثة.

الحل

بفرض $ح_ر ، ح_{ر+١} ، ح_{ر+٢}$ هي الحدود المطلوبة

$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٢١}{٣٥}$ 　　 $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

$٥ ن - ٥ ر + ٥ = ٣ ر$ 　　 $٥ ن - ٨ ر = -٥$ 　 (١)

$\frac{\text{معامل } ح_{ر+٢}}{\text{معامل } ح_{ر+١}} = \frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٧}{٢١}$ 　　 $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{١}{٣}$

$٣ن - ٣ر = ر + ١$ $٣ن - ٤ر = ١$ (٢)

وبحل المعادلتين: (١) ، (٢) $\therefore$ ن = ٧ ، ر = ٥

حاول أن تحل

٣ إذا كانت الحدود: الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هى على الترتيب ١١٢، ٤٤٨ ، ١١٢٠ ، أوجد قيم كل من ن، ص، س

مثال

إيجاد أكبر حد

٤ أوجد أكبر حد فى مفكوك $(س + ص)^{١٠}$ عندما س = ٢ ، ص = ٣

الحل

$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{١٠ + ١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢}$ $\therefore \frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{١١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر}$

أولًا: $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} \geqslant ١$ $\therefore ٣٣ - ٣ر \geqslant ٢ر$ $\therefore ٥ر \leqslant ٣٣$ $\therefore ر \leqslant ٦{,}٦$

من ذلك نستنتج أن $ح_{٧} > ح_{٦} > ح_{٥} > ...... > ح_{١}$

ثانيًا: $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} < ١$ $\therefore ٣٣ - ٣ر < ٢ر$ $\therefore ٥ر \geqslant ٣٣$ $\therefore ر \geqslant ٦{,}٦$

من ذلك نستنتج أن $ح_{١١} < ح_{١٠} < ح_{٩} < ح_{٨} < ح_{٧}$

$\therefore ح_{٧}$ هو أكبر حد فى مفكوك $(س + ص)^{١٠}$ ويساوي $^{١٠}ق_{٦} \times ٢^{٤} \times ٣^{٦} = ٢٤٤٩٤٤٠$

تمارين (١-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ فى مفكوك $(س + ص)^{١٠}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ....

أ $\frac{٣ص}{٨س}$ ب $\frac{٣س}{٨ص}$

ج $\frac{٨ص}{٣س}$ د $\frac{٨س}{٣ص}$

٢ فى مفكوك $(١ - س)^{١٢}$ معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس ....

أ $(\frac{٨}{٥})$ ب $\frac{٥}{٨}$

ج $\frac{-٨}{٥}$ د $\frac{-٥}{٨}$

٣ فى مفكوك $(س + ص)^{٨}$ تكون نسبة $\frac{ح_{٦}}{ح_{٤}}$ = ...

أ $\frac{٢٥ ص^{٢}}{١٦ س^{٢}}$ ب $\frac{٢٥س^{٢}}{١٦ ص^{٢}}$

ج ١   د $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

④ فى مفكوك $(٣أ - ٢ب)^{١١}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٣}{٢}$ فإن أ : ب = ...

أ ٩ : ٤ ب ٤ : ٩

ج ١ د -١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

⑤ من مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{٣}{س})^{١١}$ أوجد كلًا من:

أ $\frac{ح_٣}{ح_٢}$ ب $\frac{ح_٤}{ح_٥}$

ج $\frac{ح_٦}{ح_٨}$ د $\frac{\text{معامل } ح_٤}{\text{معامل } ح_٦}$

⑥ فى مفكوك $(١ + س)^{١٢}$ إذا كان $ح_٣ = ٢ح_٢$ فأوجد قيمة س ....

⑦ فى مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ إذا كان $ح_٢ = ٢٤٠$ ، $ح_٣ = ٧٢٠$ ، $ح_٤ = ١٠٨٠$ فأوجد قيمة كلًا من أ ، ب ، ن

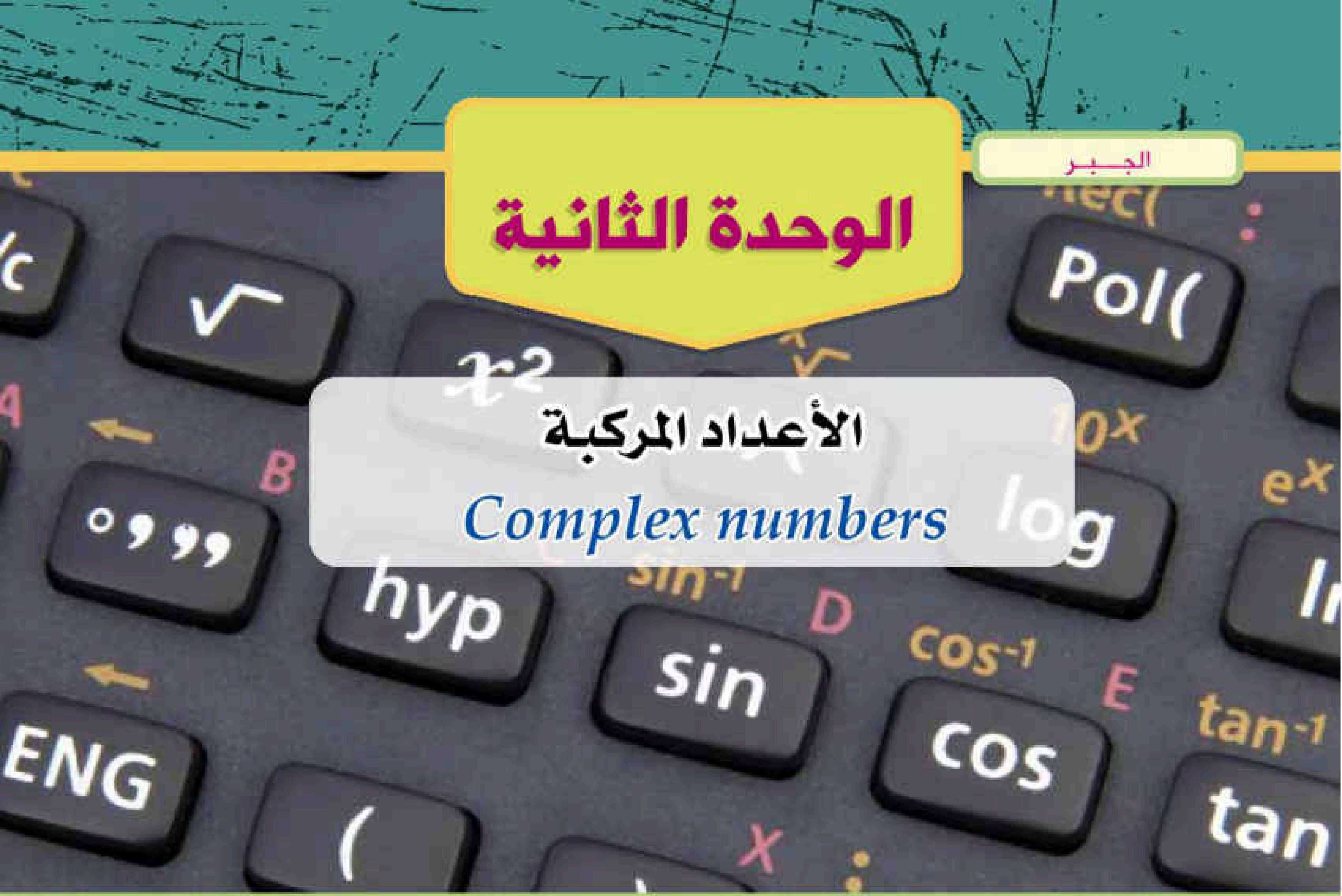
⑧ إذا كانت $ح_٢ : ح_٣$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ تساوى النسبة بين $ح_٣ : ح_٤$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$ فأوجد قيمة ن

⑨ فى مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ إذا كانت $٤ح_٦ = ٧ح_٨$ ، $\frac{ح_٤}{ح_٦} = \frac{١}{٤}$ ملاحظة وذلك عندما س = ١ فأوجد قيمة كل من م ، ن

⑩ أوجد عدديًا اكبر حد فى مفكوك $(٣ - ٥س)^{١٥}$ عندما $س = \frac{١}{٥}$.

⑪ فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ ص فأوجد قيمة ن.

الوحدة الثانية



الأعداد المركبة

Complex numbers

مقدمة الوحدة

يعد (جان روبير أرجاند) من أعلام الرياضيين البارزين، وهو أول من درس الأعداد المركبة complex numbers تفصيليًا واستخدمها فى إثبات أن لجميع المعادلات الجبرية جذورًا سواء حقيقية أم تخيلية، وتمثل الأعداد المركبة بالشكل أو المخطط المعروف بمخطط Argand Diagram تكريمًا للعالم الفرنسى أرجاند، إما بنقطة (س، ص) حيث س العدد الحقيقى على المحور السينى، وتمثل ص العدد التخيلى على المحور الصادى أو بكمية متجهه (Vector) مقدارها يساوى $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ واتجاهها $ظا^{-١} \frac{ص}{س}$. كما ستتعرف فى هذه الوحدة علي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وحل تطبيقات على الأعداد المركبة التى تدخل فى حياتنا كالكهرباء والديناميكا والنظرية النسبية ، وميادين الفيزياء المختلفة ، وهذه الأعداد هى أعداد مرنة لها القدرة على الوصول إلى النتيجة النهائية بشكل مرض.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يمثل العدد المركب ومرافقه بيانيًا بنقاط (أزواج مرتبه) فى مستوى إحداثى
- يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب.
- يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها.
- يستنتج الجذور النونية لأى عدد مركب.
- يعبر عن جا ن θ، جتا ن θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها.
- يتعرف مفكوك جا θ، وجتا θ كمتلسلات.
- يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات.
- يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب.
- يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما.
- يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب فى الصورة المثلثية.
- يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يستخدم الأعداد المركبة فى حل المشكلات الرياضية.
- يستخدم بعض برامج الحاسوب فى حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص العددين المترافقين.
- يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مصطلحات أساسية

مستوى أرجاند	Argand plane	صور مثلثة	Trigonmetric form	جذر تكعيبي	cubic root
مرافق	conjugate	نظرية ديموافر	De Moivre's theorem	دائرة الوحدة	Unitcircle
مقياس	Modulus	جذر	root	قطبي	Polar
سعة أساسية	principle amplitude	جذر تربيعي	square root		

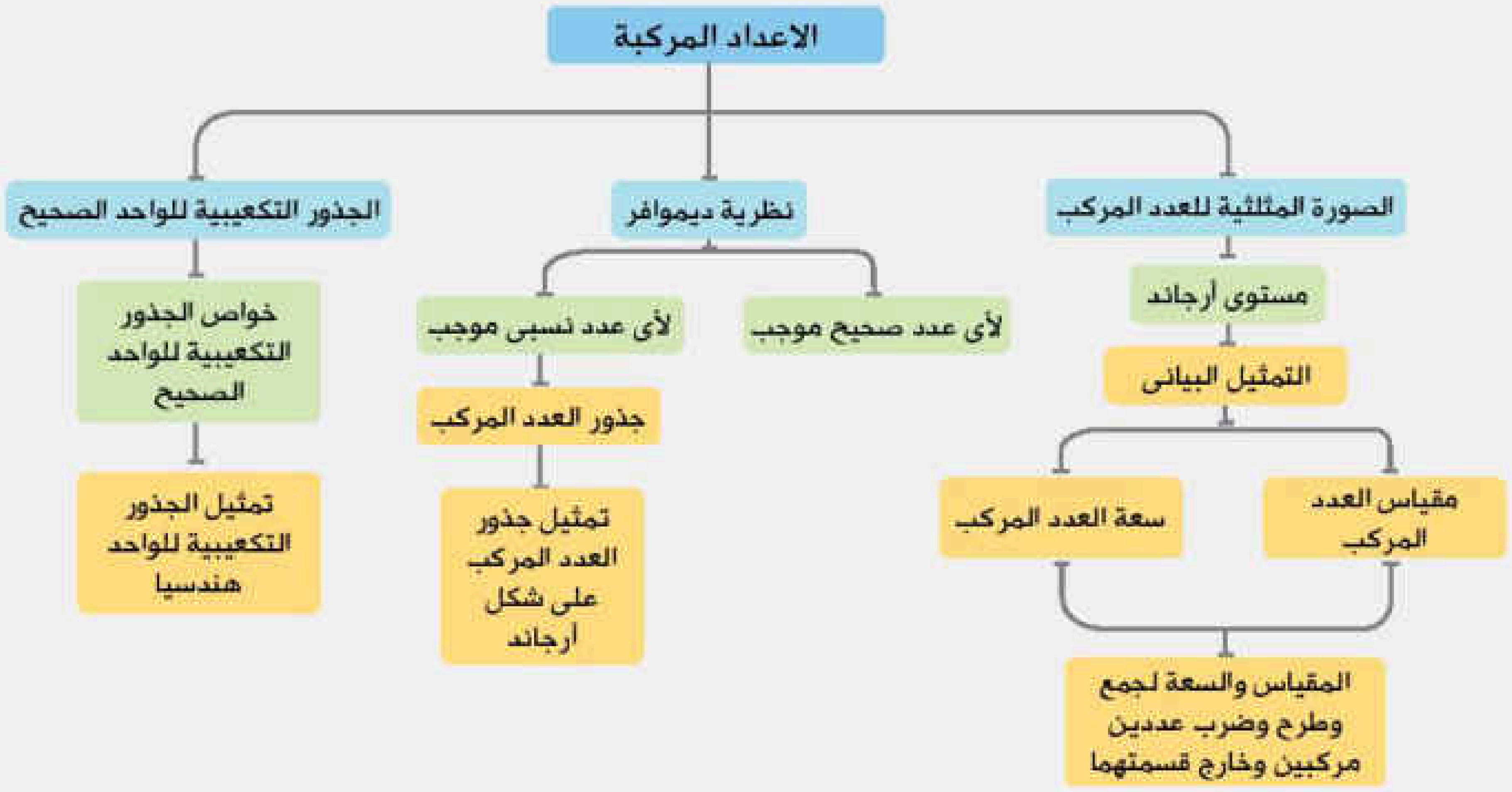
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (٢-١): الصورة المثلثية للعدد المركب
الدرس (٢-٢): نظرية ديموافر
الدرس (٢-٣): الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مخطط تنظيمي للوحدة

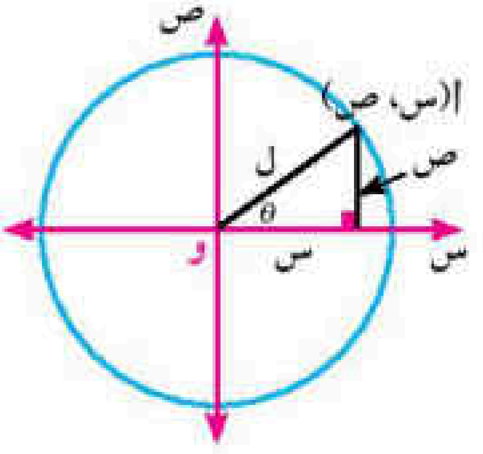


الصورة المثلثية للعدد المركب

Polar form of a complex number

سبق أن درست الأعداد المركبة، وعلمت أن العدد المركب يمكن كتابته على الصورة ع = س + ص ت **(الصورة الجبرية)**، حيث س ، ص عددان حقيقيان ، $ت^2 = -1$ و فى هذا الدرس سوف نتعرف على صورة أخرى لكتابة العدد المركب، وكيفية تمثيله بيانيًا.

الإحداثيات القطبية والديكارتية:



الشكل المقابل يمثل دائرة طول نصف قطرها ل، أ (س ، ص) تقع على الدائرة وتقابل زاوية θ .

جتاθ = $\frac{س}{ل}$ ، جاθ = $\frac{ص}{ل}$

س = ل جتاθ ، ص = ل جاθ

حيث ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ، ظاθ = $\frac{ص}{س}$ أى أن:

θ = ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$ و إذا تأملنا المستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبى بحيث ينطبق المحور القطبى على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكننا تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس .

تحويل الإحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية

إذا كانت النقطة أ فى الإحداثيات القطبية هى (ل، θ) فإن الإحداثيات الديكارتية لنفس النقطة هى (س، ص) حيث :

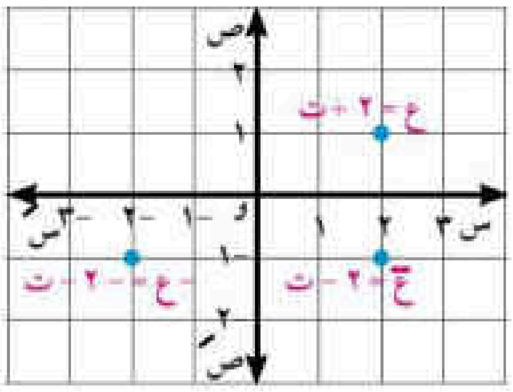
س = ل جتاθ ، ص = ل جاθ

ويكون: (س، ص) = (ل جتاθ ، ل جاθ)

مستوى أرجاند

قام العالم الرياضى **"أرجاند"** بتمثيل العدد المركب ع بيانيًا على مستوى إحداثيات متعامدة، وجعل المحور الأفقى $\overleftrightarrow{س س'}$ يمثل الجزء الحقيقى من العدد المركب وجعل المحور الرأسى $\overleftrightarrow{ص ص'}$ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب. فتكون النقطة التى إحداثيها (س، ص) تمثل العدد المركب س + ت ص

مثال



(١) فى شكل أرجاند المجاور نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين ع ، - ع متماثلتان بالنسبة لنقطة الأصل (و).

سوف تتعلم

- التمثيل البيانى للعدد المركب ومرافقة فى مستوى أرجاند.
- التمثيل البيانى لمجموع عددين مركبين.
- مقياس العدد المركب.
- سعة العدد المركب.
- السعة الأساسية للعدد المركب.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- المقياس و السعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.

مصطلحات أساسية

- مستوى أرجاند *Argand plane*
- مرافق *Conjugate*
- مقياس *Modulus*
- سعة أساسية *Principle amplitude*
- صورة مثلثية *Trigonometric form*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

كذلك نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين المترافقين ع، $\overline{ع}$ متماثلتان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{س\,س'}$

حاول أن تحل

(١) مَثِّل على شكل أرجاند كل من الأعداد:

ع = ٣ + ٤ت ، $\overline{ع}$ ، - ع ، ١ + ع

تفكير ناقد: ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ على شكل أرجاند.

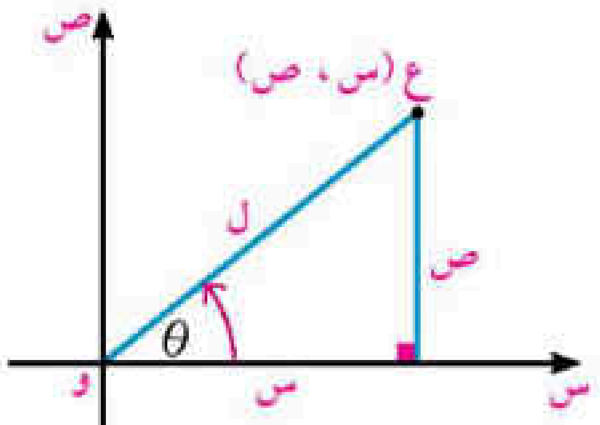
تعلم ا

المقياس والسعة للعدد المركب *The modulus and the amplitude (argument) of a complex number*

إذا كان ع = س + ص ت عددًا مركبًا تمثله نقطة ع(س ، ص) فى مستوى أرجاند، فإن مقياس العدد ع هو بُعده عن نقطة الأصل و . و يرمز لمقياس العدد ع بالرمز |ع| أو ل وتسمى θ بسعة العدد المركب، ويكون:

ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ، ظاθ = $\frac{ص}{س}$ أى أن θ = ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$

حيث $\frac{-\pi}{2}$ > ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$ > $\frac{\pi}{2}$



الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب *Polar form of a complex number*

إذا كان ع = س + ص ت عددًا مركبًا مقياسه ل وسعته الأساسية θ حيث $\theta \in$]-π، π] فإنه يكتب بالصورة ع = ل (جتا θ + ت جا θ) ويتحدد قياس θ تبعًا للحالات الآتية:

أ) س > ٠ ، ص > ٠ فإن θ تقع فى الربع الأول θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

ب) س < ٠ ، ص > ٠ فإن θ تقع فى الربع الثانى θ = π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

جـ) س < ٠ ، ص < ٠ فإن θ تقع في الربع الثالث θ = -π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

د) س > ٠ ، ص < ٠ فإن θ تقع فى الربع الرابع θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

لاحظ أن

س > ٠ ، ص = ٠ فإن θ = ٠

س < ٠ ، ص = ٠ فإن θ = π

س = ٠ ، ص > ٠ فإن θ = $\frac{\pi}{2}$

س = ٠ ، ص < ٠ فإن θ = $\frac{-\pi}{2}$

مثال

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_1$ = -$\sqrt{3}$ + ت ب) $ع_2$ = -١ - ت

الحل

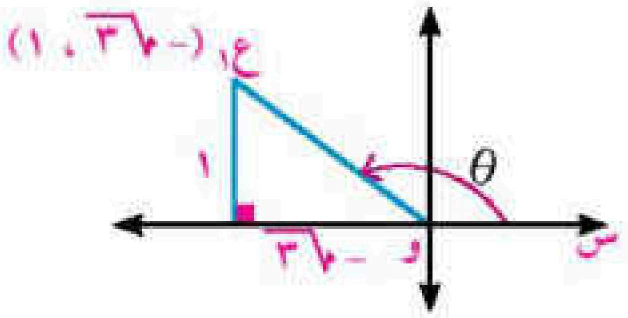
∵ صورة العدد المركب هى : ع = س + ت ص فإن :

أ) س = -$\sqrt{3}$ ، ص = ١

∴ العدد $ع_1$ يقع فى الربع الثانى

ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2}$ = $\sqrt{4}$ = ٢

θ = π + ظا$^{-1}$ ($\frac{-1}{\sqrt{3}}$) = π - $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{5\pi}{6}$

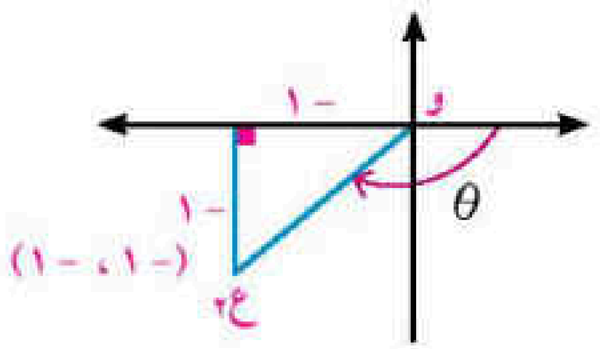


(ب) س = -١ ، ص = -١

∴ العدد $ع_٢$ يقع في الربع الثالث

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

$\theta = -\pi + ظا^{-١}(\frac{-١}{-١}) = -\pi + \frac{\pi}{٤} = \frac{-٣\pi}{٤}$



حاول أن تحل

٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_١ = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت (ب) $ع_٢ = ١ - \sqrt{٣}$ ت

(ج) $ع_٣ = -\sqrt{٣}$ ت (د) $ع_٤ = ٥$

تذكر أن

$\frac{\theta^د}{\pi} = \frac{\theta^\circ}{١٨٠^\circ}$

ويستخدم هذا القانون للتحويل من قياس ستيني إلى قياس دائري والعكس.

خواص المقياس والسعة لعدد مركب

لكل عدد مركب ع = س + ص ت و سعته θ يكون:

١) |ع| ≥ صفر

٢) سعة العدد المركب تأخذ عددًا غير منتهٍ من القيم، وذلك بإضافة عدد صحيح من دورات ٢π أي إن سعة العدد المركب تساوي $\theta + ٢\pi$ن حيث ن عدد صحيح.

٣) $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$ حيث $\bar{ع}$ هو مرافق العدد ع

٤) $ع\,\bar{ع} = |ع|^٢ = |\bar{ع}|^٢$

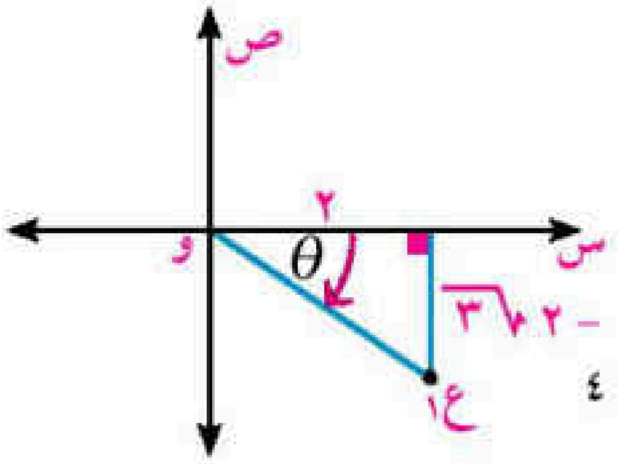
تفكير ناقد: إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هي θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

مثال

٣) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

(أ) $ع_١ = ٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت (ب) $ع_٢ = -٤$ت (ج) $ع_٣ = \frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت}$ (د) $ع_٤ = -٢$

الحل



∵ صورة العدد المركب هي: س + ت ص لذلك فإن:

(أ) س = ٢ ، ص = $-٢\sqrt{٣}$

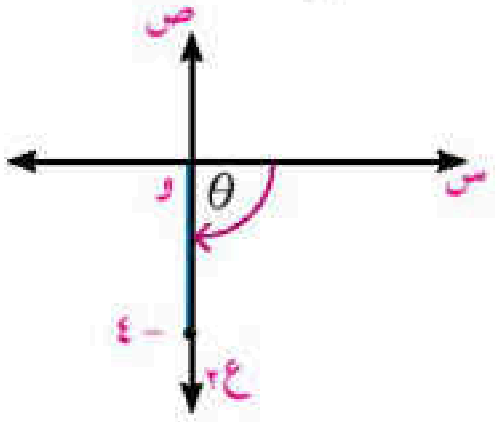
∴ $ع_١$ يقع في الربع الرابع

$ل = |ع_١| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\theta = ظا^{-١}(\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{-\pi}{٣}$

∴ $ع_١ = ل\,(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$

$= ٤\,(جتا(\frac{-\pi}{٣}) + ت\,جا(\frac{-\pi}{٣}))$

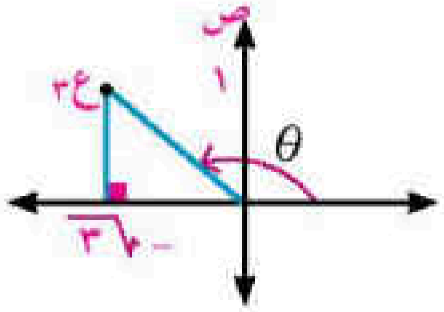


ب ∵ س = ٠ ، ص = -٤

∴ ع٢ يقع على محور ص

ل = |ع٢| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٠)^٢ + (-٤)^٢} = ٤$

$\theta = \frac{-\pi}{٢}$ ع٢ = ٤(جتا$(\frac{-\pi}{٢})$ + ت جا$(\frac{-\pi}{٢})$)



جـ ع٣ = $\frac{-٤}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} = -\sqrt{٣} + ت$

س = $-\sqrt{٣}$ ، ص = ١ ∴ ع٣ تقع فى الربع الثانى

ل = |ع٣| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

$\theta = \pi +$ ظا$^{-١}$ $\frac{-١}{\sqrt{٣}} = \frac{٥\pi}{٦}$

ع٣ = ٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$)

د ∵ س = -٣ ، ص = ٠ ∴ ع٤ يقع على محور س

ل = |ع| = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٠)^٢} = ٣$

$\theta = \pi$ ∴ ع٤ = ٣(جتا π + ت جا π)

تذكر أن

- ١ = جتا ٠ + ت جا ٠
- -١ = جتا π + ت جا π
- ت = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$
- -ت = جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$

حاول أن تحل

٣ اكتب كلًا من الأعداد الآتية فى الصورة المثلثية:

أ ع١ = ٨ ب ع٢ = ٥ت جـ ع٣ = -٣ - ٣ت

مثال

٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية:

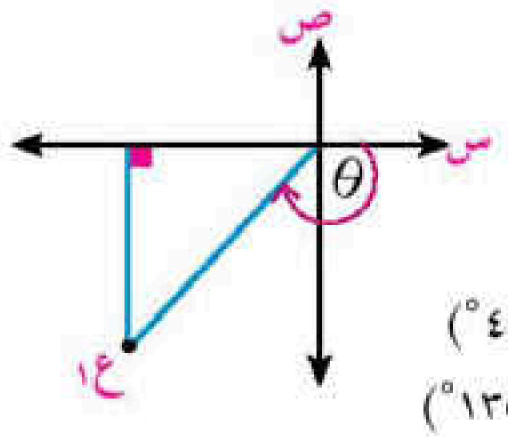
أ ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

ب ع٢ = ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ - ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

تذكر أن

جتا θ - ت جا θ =
جتا($-\theta$) + ت جا($-\theta$)

الحل



أ ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

= ٨(-جتا ٤٥° - ت جا ٤٥°)

∵ س < صفر ، ص < صفر ∴ ع١ يقع فى الربع الثالث

∵ -جتا ٤٥° = جتا(١٨٠° + ٤٥°) ، -جا ٤٥° = جا(١٨٠° + ٤٥°)

∴ ع١ = ٨(جتا ٢٢٥° + ت جا ٢٢٥°) = ٨(جتا -١٣٥° + ت جا -١٣٥°)

∴ مقياس العدد ع١ = ٨، السعة الأساسية θ = -١٣٥° = $\frac{-٣\pi}{٤}$

ب) $ع_٢ = ٢ \left(جا \frac{٤}{٣}\pi - ت جتا \frac{٤}{٣}\pi\right)$

∵ س < 0 ، ص < 0

∵ $جا \frac{٤}{٣}\pi = جتا \left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{٤}{٣}\pi\right) = جتا \frac{١٧}{٦}\pi = جتا \left(\frac{٥\pi}{٦}\right)$

$- جتا \frac{٤}{٣}\pi = جا \left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{٤}{٣}\pi\right) = جا \left(\frac{١٧}{٦}\pi\right) = جا \left(\frac{٥\pi}{٦}\right)$

∴ $ع_٢ = ٢\left(جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦}\right)$

∴ مقياس العدد $ع_٢ = ٢$، السعة الأساسية $\frac{٥\pi}{٦}$

تذكر أن

$جا \left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = جتا \theta$

$جتا \left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = - جا \theta$

$جا \left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right) = - جتا \theta$

$جتا \left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right) = جا \theta$

حاول أن تحل

٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_١ = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٣} - ت جا \frac{\pi}{٣}\right)$ ب) $ع_٢ = \frac{-١}{٢\sqrt{٢}} \left(جا ٤٥° - ت جا ٤٥°\right)$

تعلم ٣

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

multiplying and dividing complex numbers using the polar form

إذا كان $ع_١ = ل_١(جتا \theta_١ + ت جا \theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢)$ فإن

١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ (جتا \theta_١ + ت جا \theta_١)(جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢)$

$= ل_١ ل_٢ (جتا(\theta_١ + \theta_٢) + ت جا(\theta_١ + \theta_٢))$ (١)

أى إن $|ع_١ ع_٢| = ل_١ ل_٢ = |ع_١||ع_٢|$

$سعة (ع_١ ع_٢) = \theta_١ + \theta_٢$

٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{جتا \theta_١ + ت جا \theta_١}{جتا \theta_٢ + ت جا \theta_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} (جتا (\theta_١ - \theta_٢) + ت جا(\theta_١ - \theta_٢))$ (٢)

أى إن $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{|ع_١|}{|ع_٢|}$ ، $سعة \left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = \theta_١ - \theta_٢$

استعن بمعلمك لإثبات صحة العلاقات (١) ، (٢)

مثال

٥) عَبِّر عن $٣ \left(جتا \frac{٥\pi}{١٢} + ت جا \frac{٥\pi}{١٢}\right) \times ٤ \left(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}\right)$ بالصورة س + ص ت

الحل

$٣ \left(جتا \frac{٥\pi}{١٢} + ت جا \frac{٥\pi}{١٢}\right) \times ٤ \left(جتا \frac{\pi}{١٢} + ت جا \frac{\pi}{١٢}\right)$

$= ٣ \times ٤ \left(\left(جتا \frac{٥\pi}{١٢} + \frac{\pi}{١٢}\right) + ت جا \left(\frac{٥\pi}{١٢} + \frac{\pi}{١٢}\right)\right)$

$= ١٢ \left(جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}\right) = ١٢(٠ + ت (١)) = ١٢ ت$

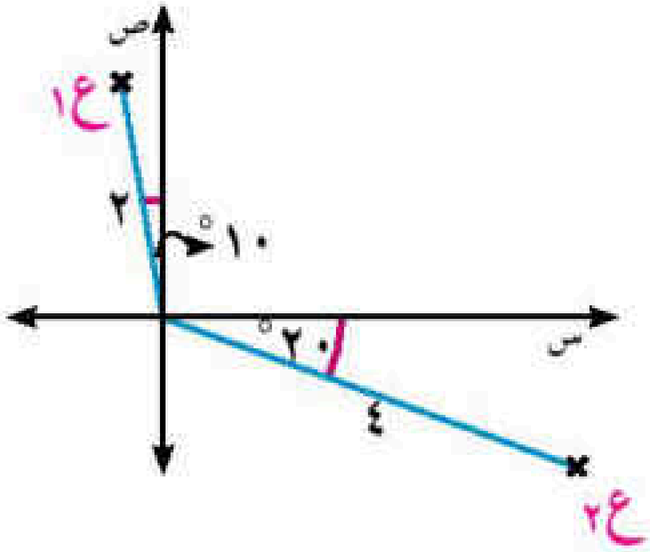
حاول أن تحل

(٥) عبر عن $٢(\text{جتا}\frac{\pi}{١٥} + \text{ت جا}\frac{\pi}{١٥}) \times ٣(\text{جتا}\frac{-٢\pi}{٥} + \text{ت جا}\frac{-٢\pi}{٥})$ بالصورة س + ت ص

مثال

(٦) إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند كما بالشكل المقابل، أوجد على الصورة س + ص ت العدد $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحل



من الرسم $|ع_١| = ٢$ ، سعة $ع_١ = ٩٠° + ١٠° = ١٠٠°$

$\therefore ع_١ = ٢(\text{جتا } ١٠٠° + \text{ت جا } ١٠٠°)$

$|ع_٢| = ٤$ ، سعة $ع_٢ = -٢٠°$

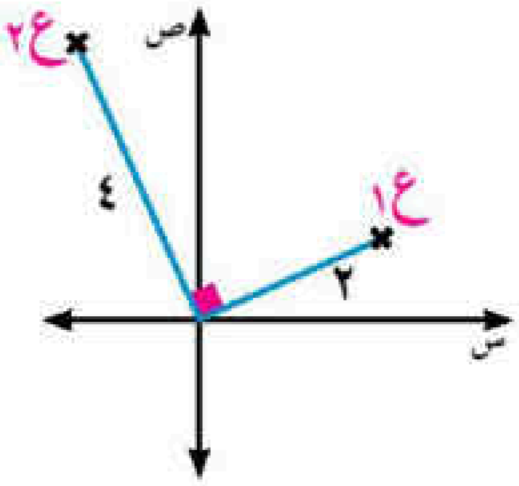
$\therefore ع_٢ = ٤(\text{جتا }(-٢٠°) + \text{ت جا }(-٢٠°))$

$\therefore \frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٤}{٢} \times \frac{\text{جتا}(-٢٠°) + \text{ت جا}(-٢٠°)}{(\text{جتا}١٠٠° + \text{ت جا}١٠٠°)}$

$= ٢[\text{جتا}(-٢٠° - ١٠٠°) + \text{ت جا}(-٢٠° - ١٠٠°)]$

$= ٢(\text{جتا}(-١٢٠°) + \text{ت جا}(-١٢٠°))$

$= ٢(-\frac{١}{٢} - \text{ت} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}) = -١ - \sqrt{٣}\ \text{ت}$



حاول أن تحل

(٦) باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$ على الصورة س + ص ت

نتائج:

١) إذا كان ع = ل(جتا θ + ت جا θ) فإن

(أ) $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta))$ (ب) $ع^٢ = ل^٢(\text{جتا } ٢\theta + \text{ت جا } ٢\theta)$

٢) يمكن تعميم حاصل ضرب عدد محدود من الأعداد المركبة فإذا كان $ع_١$، $ع_٢$، ... $ع_ن$ أعدادًا مركبة وكان:

$ع_١ = ل_١(\text{جتا}\theta_١ + \text{ت جا}\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(\text{جتا}\theta_٢ + \text{ت جا}\theta_٢)$، .... ، $ع_ن = ل_ن(\text{جتا}\theta_ن + \text{ت جا}\theta_ن)$

فإن: $ع_١ ع_٢ \ldots ع_ن = ل_١ ل_٢ \ldots ل_ن(\text{جتا}(\theta_١ + \theta_٢ + \ldots + \theta_ن) + \text{ت جا}(\theta_١ + \theta_٢ + \ldots + \theta_ن))$

وفي الحالة الخاصة عندما $ع_١ = ع_٢ = \ldots = ع_ن = ل(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)$ يكون:

$$ع^ن = ل^ن(\text{جتا ن}\theta + \text{ت جا ن}\theta)$$

مثال

(٧) ضع العدد ١- ت على الصورة المثلثية، ثم أوجد $(١ - \text{ت})^٨$

الحل

$\because$ س = ١ ، ص = -١ $\qquad$ ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

$\because$ س > ٠ ، ص < ٠ $\qquad \therefore$ ع يقع فى الربع الرابع

θ = طا$^{-١}(\frac{-١}{١}) = \frac{-\pi}{٤}$ $\quad \therefore$ ١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٤}$)

$\therefore$ (١ - ت)^٨ = $(\sqrt{٢})^٨$ (جتا$(\frac{-\pi}{٤})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{٤}))^٨$

= ١٦ (جتا (-٢π) + ت جا (-٢π))

= ١٦ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ١٦

حاول أن تحل

٧) إذا كان $ع_١$ = ٢(جتا ١٠° + ت جا ١٠°) ، $ع_٢$ = ٣(جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)
أوجد العدد $ع_١^٤ \; ع_٢^٢$ على الصورة س + ص ت

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) *Exponential form of a complex number (Euler form)*

كل دالة فى المتغير س يمكن التعبير عنها كمتسلسلة من قوى س تسمى متسلسلة ماكلورين (Maclaurinseries) وفيما يلى نورد مفكوك ماكلورين لبعض الدوال محل الدراسة فى هذه الوحدة.

١) دالة الجيب ص = جا س

$$\text{جا س} = \frac{س}{|\underline{١}} - \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + \frac{س^٥}{|\underline{٥}} - \ldots + (-١)^ن \times \frac{س^{٢ن+١}}{|\underline{٢ن+١}} + \ldots$$

(دالة الجيب دالة فردية جا(- س) = - جا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الفردية)

٢) دالة جيب التمام ص = جتا س

$$\text{جتا س} = ١ - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٤}{|\underline{٤}} - \ldots + (-١)^ن \times \frac{س^{٢ن}}{|\underline{٢ن}} + \ldots$$

(دالة جيب التمام هى دالة زوجية لأن جتا(- س) = جتا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الزوجية)

٣) الدالة الأسية ص = $هـ^س$

$$هـ^س = ١ + \frac{س}{|\underline{١}} + \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + \ldots + \frac{س^ن}{|\underline{ن}} + \ldots$$

لاحظ أن

$$هـ^{ت س} = ١ + \frac{ت س}{|\underline{١}} + \frac{ت^٢ س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{ت^٣ س^٣}{|\underline{٣}} + \ldots + \frac{ت^ن س^ن}{|\underline{ن}} + \ldots$$

$$= ١ + \frac{ت س}{|\underline{١}} - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} - \frac{ت س^٣}{|\underline{٣}} + \ldots$$

$$= (١ - \frac{س^٢}{|\underline{٢}} + \frac{س^٤}{|\underline{٤}} - \ldots) + ت (\frac{س}{|\underline{١}} - \frac{س^٣}{|\underline{٣}} + \ldots)$$

$$هـ^{ت س} = \text{جتا س} + \text{ت جا س}$$

أضف إلى معلوماتك

معادلة أويلر $هـ^{\pi ت}$ + ١ = صفر و هى تربط بين أشهر ٥ ثوابت.

فى صورة أويلر θ يجب أن يكون بالتقدير الدائرى.

أى إن العدد المركب ع = س + ت ص = ل(جتاθ + ت جاθ) يمكن كتابته على الصورة:

$$ع = ل\, هـ^{\theta ت}$$

وتسمى صورة أويلر حيث θ بالتقدير الدائرى.

مثال

٨ اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر):

أ $ع_١ = ١ + ت$ ب $ع_٢ = -١ + \sqrt{٣}\ ت$ جـ $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت}$ د $ع_٤ = -٢ت$

الحل

أ $ع_١ = ١ + ت$ ∴ $س = ١$ ، $ص = ١$

$ل = |ع_١| = \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$

∵ $س > ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_١$ يقع في الربع الأول

$\theta = ظا^{-١}(\frac{١}{١}) = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $ع_١ = ل\ هـ^{\theta ت} = \sqrt{٢}\ هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

ب $ع_٢ = -١ + \sqrt{٣}\ ت$ ∴ $س = -١$ ، $ص = \sqrt{٣}$

$ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∵ $س < ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_٢$ يقع في الربع الثاني

∴ $\theta = \pi + ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = \frac{٢}{٣}\pi$ ∴ $ع_٢ = ل\ هـ^{\theta ت} = ٢\ هـ^{\frac{٢}{٣}\pi ت}$

جـ $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت} = هـ^٣ \times هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ ويكون $ل = |ع_٣| = هـ^٣$ ، سعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$

د ∵ $ع_٤ = -٢ت$ ∴ $س = ٠$ ، $ص = -٢$ ∴ $ل = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

∵ $س = ٠$ ، $ص = -٢$ ∴ $ع_٤$ يقع على محور ص

∴ $\theta = \frac{-\pi}{٢}$ ∴ $ع_٤ = ٢\ هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

حاول أن تحل

٨ إذا كان $ع = \frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}$ فاكتب العدد ع بالصورة الأسية.

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية.

إذا كان $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$

فإن $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{\theta_١ ت} \times هـ^{\theta_٢ ت} = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$ ،

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{هـ^{\theta_١ ت}}{هـ^{\theta_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

مثال

٩ أوجد ناتج كل مما يأتي في الصورة الأسية:

أ $٢(جتا ٢٥° + ت\ جا ٢٥°) \times ٢(جا ١٥٨° - ت\ جتا ١٥٨°)$ ب $(\frac{١ + ت}{١ - ت})^٧$

الحل

أ) تحويل ع٢ إلى الصورة المثلثية القياسية كالآتى:

∵ (جا ١٥٨° - ت جا ١٥٨°) = جا (٩٠° + ٦٨°) - ت جتا (٩٠° + ٦٨°) = جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°

∴ ٣ (جتا ٢٥° + ت جا ٢٥°) × ٢ (جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°)

= ٦ (جتا (٢٥° + ٦٨°) + ت جا (٢٥° + ٦٨°))

= ٦ (جتا ٩٣° + ت جا ٩٣°) = ٦ $هـ^{١,٦٢ت}$

> **لاحظ أن**
>
> $\frac{٩٣°}{١٨٠°} = \frac{\theta^{د}}{\pi}$
>
> **أى أن:** $\theta^{د} = \frac{٩٣°}{١٨٠°} \times \pi$
>
> $\theta^{د} \simeq ١,٦٢$

ب) ∵ ١ + ت = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا (-٤٥°) + ت جا (-٤٥°))

∴ $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)$ = جتا (٤٥° + ٤٥°) + ت جا (٤٥° + ٤٥°)

= جتا ٩٠° + ت جا ٩٠° = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$

∴ $\left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٧}$ = (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)^{٧} = جتا $\frac{٧\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٢}$

= جتا $(\frac{-\pi}{٢})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{٢})$ = $هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

حاول أن تحل

٩) إذا كان ع١ = ١ - $\sqrt{٣}$ ت ، ع٢ = ١ + ت ، أوجد كلًّا مما يأتى فى الصورة المثلثية:

أ) ع١ع٢ ب) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ ج) $(ع_٢)^{٦}$

مثال

١٠) عبر عن ع = $\sqrt{٢}$ $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

الحل

∵ ع = $\sqrt{٢}$ $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ ∴ ل = |ع| = $\sqrt{٢}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$

∴ ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ $(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت)$

= -١ + ت

> **لاحظ أن**
>
> جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جتا ١٣٥° = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$
>
> جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا ١٣٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

١٠) عبر عن ع = ٨ $هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

تمارين (٢ - ١)

اكمل ما يأتى

(١) العدد ع = ٣ - ٤ت يُمثَّل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث أ = (........ ، ....)

(٢) إذا كانت نقطة أ تمثل العدد ع على مستوى أرجاند، ب تمثل العدد $\overline{ع}$ على مستوى أرجاند، فإن ب صورة أ بالانعكاس فى ....

(٣) مقياس العدد المركب ع = -٥ت يساوى ....

(٤) إذا كان ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن |ع| = ...

(٥) إذا كانت θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن سعة $\overline{ع}$ هى ....

(٦) إذا كان ع = $\frac{١}{\overline{ع}}$ فإن |ع| = ...

(٧) الصورة الأسية للعدد -١ + ت هى ....

(٨) إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن السعة الأساسية العدد $(١ + \sqrt{٣}\,ت)^{٨}$ هى ....

(٩) الصورة المثلثية للعدد ع = ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ت هى ....

(١٠) إذا كانت سعة العدد المركب ع هى θ فإن سعة العدد المركب ٢ع هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) إذا كان ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

(١٢) إذا كان ع = $(١ + \sqrt{٣}\,ت)^{ن}$ و كان |ع| = ٨ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (ج) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(١٣) إذا كان $ع_١ = ل_١ (جتا\theta_١ + ت جا\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢ (جتا\theta_٢ + ت جا\theta_٢)$ وكان $\theta_١ + \theta_٢ = \pi$ فإن $ع_١ ع_٢$ =

(أ) $ل_١ ل_٢$ (ب) $- ل_١ ل_٢$ (ج) $ل_١ ل_٢ ت$ (د) $- ل_١ ل_٢ ت$

(١٤) سعة العدد المركب ع = -٣ تساوى

(أ) صفر° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(١٥) إذا كان ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن $\sqrt{|ع|}$ =

(أ) -١ - $\sqrt{٣}$ ت (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) ٢ (د) -٢

(١٦) إذا كان $ع_١$ = - ١ - ت فإن الصورة الأسية للعدد ع هى

(أ) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ (ب) $هـ^{\frac{٥\pi}{٤} ت}$ (جـ) $\sqrt{٢}\ هـ^{\frac{٣٠\pi}{٤} ت}$ (د) $\sqrt{٢}\ هـ^{٢٢٥ ت}$

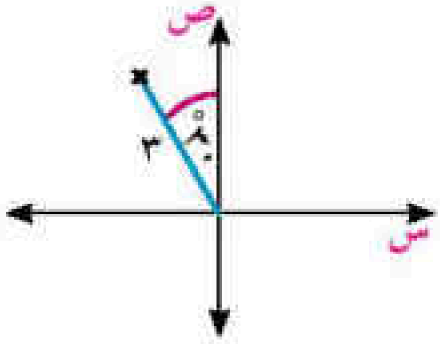
(١٧) إذا كان $ع_١$ = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = - ٣ - ٣ $\sqrt{٣}$ فإن سعة العدد $ع_١ + ع_٢$ =

(أ) °٦٠ (ب) °٢٤٠ (جـ) °١٨٠ (د) °٣٠٠

(١٨) إذا كان س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ فإن $س^٢ + ص^٢$

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ - ب^٢$ (جـ) ٢ أ ب (د) ١

(١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب



(أ) ٣(جتا °٣٠ + ت جا°٣٠)

(ب) ٣(جتا °٦٠ + ت جا°٦٠)

(جـ) ٣(جتا °١٢٠ + ت جا°١٢٠)

(د) ٣(جتا °١٥٠ + ت جا°١٥٠)

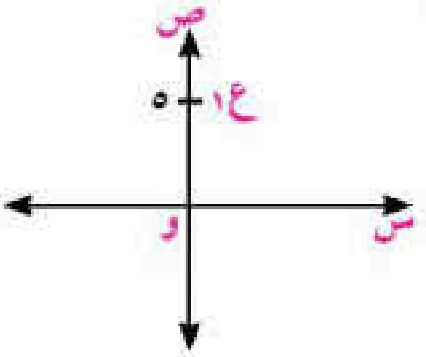
(٢٠) إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{١}{ع}$ هى ......

(أ) θ (ب) $-\theta$ (جـ) $\pi - \theta$ (د) $-\pi + \theta$

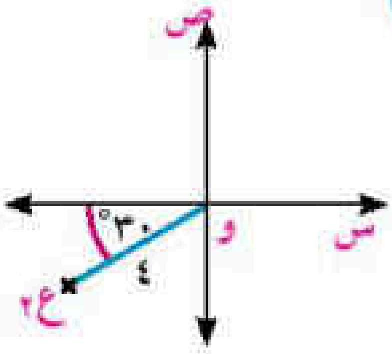
أجب عمَّا يأتى:

(٢١) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

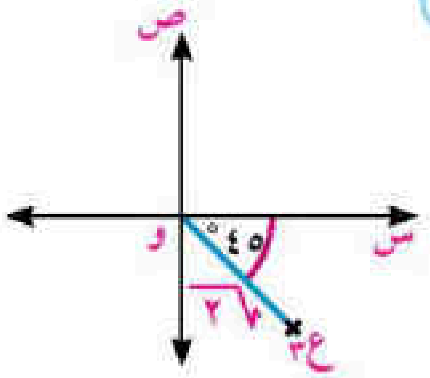
(أ)



(ب)



(جـ)



(د) $ع_٤$ = - $\sqrt{٣}$ + ٤ت (هـ) $ع_٥$ = ٤ (جتا °٤٠ - ت جا °٤٠)

(٢٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_١$ = - ١ + ت

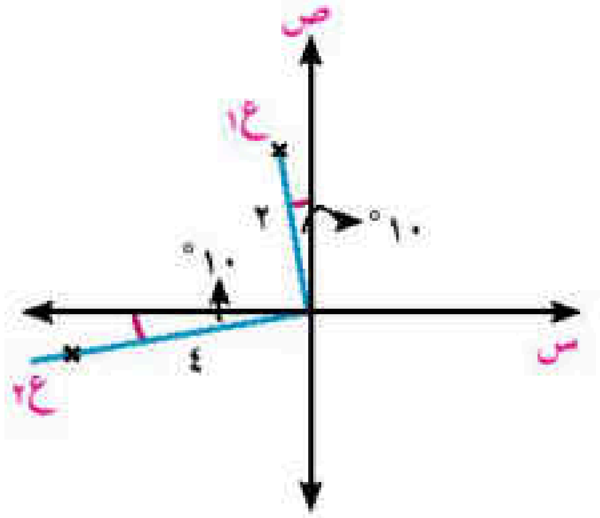
(ب) $ع_٢ = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت}$

(جـ) $ع_٣$ = - ٢(جتا °٤٥ + ت جا °٤٥)

(د) $ع_٤$ = ١ + ت ظا °٢٠

٢٣ إذا كان $ع_١$ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦° ، $ع_٢$ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°
$ع_٣$ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤، أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

٢٤ إذا كان $ع_١$ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، $ع_٢$ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)، أوجد على الصورة الأسية العدد:
$ع_١ ع_٢$ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$



٢٥ فى **الشكل المقابل** أوجد على الصورة الأسية العدد: $\frac{ع_١}{ع_٢}$

٢٦ اكتب كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية:
أ $ع_١ = هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$
ب $ع_٢ = ٢ هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$
ج $ع_٣ = ٣ هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$

٢٧ إذا كان ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) أثبت أن $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

٢٨ إذا كان ع = $\sqrt{٣}$ + ت أوجد بالصورة الجبرية $ع^٦$

٢٩ إذا كان ع = $\frac{(أ+ب) + ت (أ-ب)}{(أ-ب) - ت (أ+ب)}$ فأوجد العدد ع فى أبسط صورة ثم أوجد |ع| حيث أ ، ب $\in$ ح

٣٠ **تفكير ابداعى:** إذا كان $ع_١$ = جتا ٧٥ + ت جا ٧٥ ، $ع_٢$ = جتا ١٥ + ت جا ١٥، أوجد بالصورة المثلثية للعدد: $ع_١ + ع_٢$

٣١ إذا كان سعة $ع_١ = \frac{\pi}{٣}$ ، و سعة $ع_٢ = \frac{٣\pi}{٤}$ ، سعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$ أوجد:
أ سعة $(ع_١^٣ ع_٢^٢)$ ب سعة $(٢ع_١ . ع_٢)$ ج سعة $(\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣})$ د سعة $(ع_٣^٦)$

٣٢ **تفكير ابداعى:** أثبت أن جتا $\theta = \frac{١}{٢}(هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت})$، جا $\theta = \frac{-ت}{٢}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت})$

٢ - ٢ نظرية ديموافر

De Moivre's theorem

سوف تتعلم

- نظرية ديموافر لأس صحيح موجب.
- نظرية ديموافر لأس نسبي موجب.
- جذور العدد المركب.
- تمثيل جذور العدد المركب على شكل أرجاند.

مصطلحات أساسية

- نظرية ديموافر *demoivres thearem*
- جذر *root*

فكر و ناقش

أ) إذا كان ع عددًا مركبًا مقياسه ل، وسعته الأساسية θ فأوجد:

١) مقياس العدد $ع^٣$ ٢) سعة العدد $ع^٣$

ب) إذا كان ع عددًا مركبًا، وكان السعة الأساسية للعدد $ع^٣$ هي θ فإن السعة الأساسية للعدد ع هي ....

تعلم

نظرية ديموافر بأس صحيح

إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا

فإن $(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)^{ن} = جتا\,ن\theta + ت\,جا\,ن\theta$

مثال

١) عبر عن جتا ٣θ بدلالة قوى جتا θ

الحل

$\because (جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)^٣ = جتا\,٣\theta + ت\,جا\,٣\theta$ **(١) نظرية ديموافر**

أيضًا $(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)^٣ = جتا^٣\theta + ٣ق_١\,جتا^٢\theta\,(ت\,جا\,\theta)$

$+ ٣ق_٢\,جتا\,\theta\,(ت\,جا\,\theta)^٢ + (ت\,جا\,\theta)^٣$ **(نظرية ذات الحدين)**

$= جتا^٣\theta + ٣ت\,جتا^٢\theta\,جا\,\theta - ٣\,جتا\,\theta\,جا^٢\theta - ت\,جا^٣\theta$ **(٢)**

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء الحقيقي

$\because جا^٢\theta + جتا^٢\theta = ١ \quad \therefore جا^٢\theta = ١ - جتا^٢\theta$

$\therefore جتا\,٣\theta = جتا^٣\theta - ٣\,جتا\,\theta\,جا^٢\theta$

$= جتا^٣\theta - ٣\,جتا\,\theta\,(١ - جتا^٢\theta)$

$= جتا^٣\theta - ٣\,جتا\,\theta + ٣\,جتا^٣\theta$

$= ٤\,جتا^٣\theta - ٣\,جتا\,\theta$

حاول أن تحل

١) عبر عن جا ٣ θ بدلالة قوى جا θ

نظرية ديموافر بأس نسبي موجب

نعلم أن جتا θ + ت جا θ = جتا (θ + ٢ر π) + ت جا (θ + ٢ر π)؛ حيث ر عدد صحيح.

فإذا كان ك عددًا موجبًا فإن (جتاθ + ت جا θ)$^{\frac{1}{ك}}$ = جتا $\frac{\theta + ٢ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ر \pi}{ك}$

أي إن مقدار (جتاθ + ت جا θ)$^{\frac{1}{ك}}$ يأخذ قيمًا متعددة تبعًا لقيم ر، ويكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك من القيم، التي نحصل عليها بوضع قيم ر= ...، -٢، -١، ٠، ١، ٢ .... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ر \pi}{ك}$ محصورة بين $-\pi$، π

مثال

(٢) أوجد بالصورة المثلثية وبالصورة الأسية جذور المعادلة الآتية في ك ع^{٤} = ٨(١- $\sqrt{٣}$ ت)
ثم اكتب مجموعة حل المعادلة.

الحل

∵ ع^{٤} = ٨ - ٨ $\sqrt{٣}$ ت ∴ س = ٨، ص = -٨ $\sqrt{٣}$

ل = $\sqrt{(٨)^{٢} + (-٨\sqrt{٣})^{٢}}$ = ١٦ ، ظاθ = $\frac{-٨\sqrt{٣}}{٨}$ = $-\sqrt{٣}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ع^{٤} تقع في الربع الرابع

θ = ظا$^{-١}$ ($-\sqrt{٣}$) = $-\frac{\pi}{٣}$

∴ ع^{٤} = ١٦ (جتا $\frac{-\pi}{٣}$ + ت جا ($\frac{-\pi}{٣}$))

∴ ع = ٢ (جتا$\frac{1}{٤}$ ($-\frac{\pi}{٣}$ + ٢πر) + ت جا$\frac{1}{٤}$ ($-\frac{\pi}{٣}$ + ٢π ر))

عندما ر = ٠ فإن ع$_{١}$ = ٢ (جتا($\frac{-\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{١٢}ت}$

عندما ر = ١ فإن ع$_{٢}$ = ٢ (جتا($\frac{٥\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{٥\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$

عندما ر = -١ فإن ع$_{٣}$ = ٢ (جتا($\frac{-٧\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{-٧\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{-٧\pi}{١٢}ت}$

عندما ر = ٢ فإن ع$_{٤}$ = ٢ (جتا($\frac{١١\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{١١\pi}{١٢}$)) = ٢ هـ$^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}$

∴ مجموعة الحل = {٢هـ$^{\frac{-\pi}{١٢}ت}$ ، ٢ هـ$^{\frac{٥\pi}{١٢}ت}$ ، ٢هـ$^{\frac{-٧\pi}{١٢}ت}$ ، ٢ هـ$^{\frac{١١\pi}{١٢}ت}$}

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة ع^{٤} = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

مثال

(٣) أوجد جذور المعادلة ع^{٣} = ١، ومَثِّل الجذور على مستوى أرجاند.

الحل

ع^{٣} = ١

= جتا ٠° + ت جا ٠°

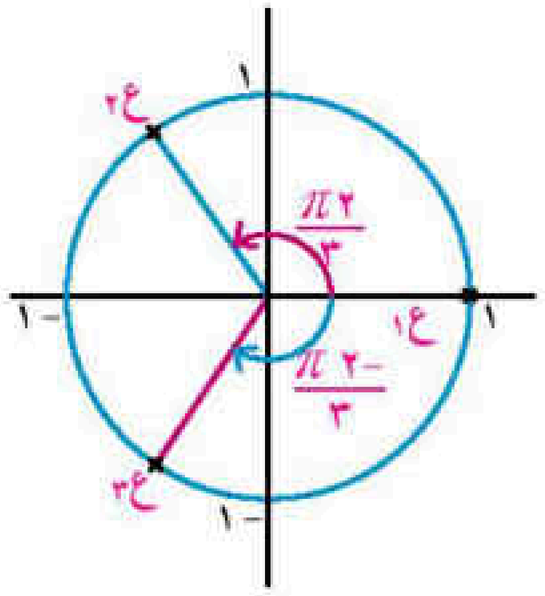
∴ ع = (جتا ٠° + ت جا ٠°)$^{\frac{1}{٣}}$

$= \text{جتا } \frac{1}{3}\ (2\text{ر}\pi) + \text{ت جا } \frac{1}{3}\ (2\text{ر}\pi)$

عندما ر = ٠ فإن $ع_1$ = جتا ٠° + ت جا ٠° = ١

عندما ر = ١ فإن $ع_2$ = جتا $\frac{2\pi}{3}$ + ت جا $\frac{2\pi}{3}$

عندما ر = -١ فإن $ع_3$ = جتا $\frac{-2\pi}{3}$ + ت جا $\frac{-2\pi}{3}$



نلاحظ أن الجذور تقسم الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها الوحدة إلى ٣ أقواس متساوية، وقياس كل منها ١٢٠°(إحداثيات النقط تكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع).

حاول أن تحل

(٣) أوجد جذور المعادلة $ع^4$ = ١ ومثل الجذور على مستوى أرجاند.

الجذور النونية

المعادلة $س^ن$ = أ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{1}{ن}}$.

يمكن حسابها بإيجاد الصورة المثلثية للعدد أ ثم تطبيق نظرية ديموافر، وتقع الجذور جميعًا في مستوى أرجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{1}{ن}}$. وتكون رؤوس مضلعًا منتظمًا، عدد أضلاعه ن.

مثال (الجذور الخماسية للعدد - ٣٢)

(٤) مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسية للعدد - ٣٢

الحل

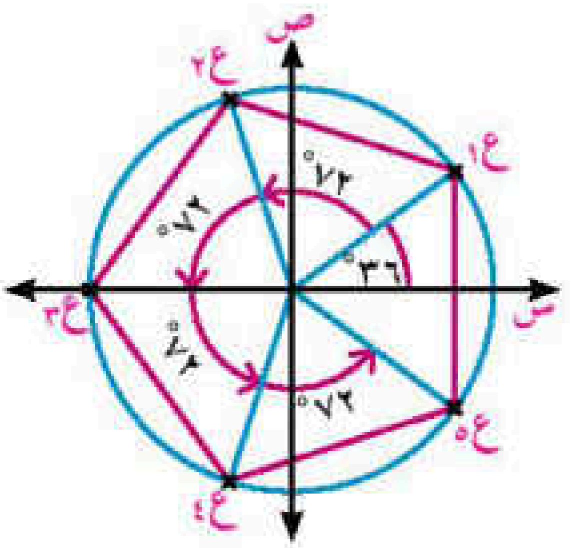
الجذور الخماسية للعدد - ٣٢ هي حلول المعادلة $ع^5$ = - ٣٢

وبتحويل العدد - ٣٢ إلى الصورة المثلثية.

∴ $ع^5$ = ٣٢ (جتا π + ت جا π)

∴ ع = $32^{\frac{1}{5}}$ (جتا π + ت جا π)$^{\frac{1}{5}}$

$= 2\ (\text{جتا } \frac{1}{5}\ (\pi + 2\text{ر}\pi) + \text{ت جا } \frac{1}{5}\ (\pi + 2\text{ر}\pi))$.



نوجد الجذر الأول وذلك بوضع ر = صفر

∴ ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{5}$ + ت جا $\frac{\pi}{5}$) = ٢ (جتا ٣٦° + ت جا٣٦°)

وتكون قياس الزاوية بين كل جذر والذي يليه هي $\frac{360}{5}$ = ٧٢°

$ع_2$ = ٢ (جتا (٣٦° + ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٧٢°)) = ٢ (جتا ١٠٨° + ت جا ١٠٨°)

$ع_3$ = ٢ (جتا(٣٦° + ٢ × ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٢ × ٧٢°)) = ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

$ع_4$ = ٢ (جتا (٣٦° + ٣×٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٣ × ٧٢°)) = ٢ (جتا ٢٥٢° + ت جا ٢٥٢°)

= ٢ (جتا (- ١٠٨°) + ت جا (- ١٠٨°))

ع$_{٥}$ = ٢ (جتا (٣٦° + ٤ × ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٤×٧٢°)) = ٢ (جتا ٣٢٤° + ت جا ٣٢٤°)

= ٢ (جتا -٣٦° + ت جا - ٣٦°)

حاول أن تحل

④ مثِّل على شكل أرجاند الجذور السداسية للعدد ١

مثال

⑤ أوجد الجذور التربيعية للعدد ٣+ ٤ ت

الحل

نفرض أن (٣+ ٤ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ص ت بتربيع الطرفين

∴ ٣+ ٤ت = س^{٢} - ص^{٢}+ ٢ س ص ت

بمساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلي

∴ س^{٢} - ص^{٢}= ٣ ⟵ (١) ، ٢ س ص = ٤ ⟵ (٢) بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س^{٤} - ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤س^{٢} ص^{٢} = ٩ + ١٦ ∴ س^{٤} + ٢س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥ ∴ (س^{٢}+ ص^{٢})= ٥ ⟵ (٣)

بجمع (١)، (٣) ⟵ ٢ س^{٢} = ٨ ومنها س = ± ٢ عند س = ٢ بالتعويض في (٢) ⟵ ص = ١

عند س = -٢ بالتعويض في (٢) ⟵ ص = -١

∴ الجذر الأول = ٢ + ت ∴ الجذر الثاني = - ٢ - ت

حاول أن تحل

⑤ أوجد الجذرين التربيعين للعدد ٧ - ٢٤ت

مثال

⑥ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة (١ - ت) س^{٢} - (٦ - ٤ت) س +٩ - ٧ ت = ٠

الحل

يمكن وضع المعادلة على الصورة:

س^{٢} - $\frac{٦ - ٤ت}{١ - ت}$ س + $\frac{٩ - ٧ت}{١ - ت}$ = ٠ س^{٢} - (٥ + ت) س + ٨ + ت = ٠

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} \quad ٤أجـ}}{٢أ}$ = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{(٥ + ت)^{٢} \quad ٤×١(٨ + ت)}}{٢}$

س = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{٢٤ + ١٠ت - ٣٢ - ٤ت}}{٢}$

س = $\frac{(٥ + ت) \pm \sqrt{- ٨ + ٦ت}}{٢}$

نفرض أن أ + ب ت = $\sqrt{-٨ + ٦ت}$ بتربيع الطرفين

$أ^2 - ب^2 + 2 أ ب ت = -8 + 6 ت$

$أ^2 - ب^2 = -8$ (1)　　　$2 أ ب = 6$ (2)

$أ^2 + ب^2 = 10$ (3)　　　من (1)، (3) $أ^2 = 1$　　$\therefore أ = \pm 1$　　$\therefore ب = \pm 3$

$\therefore أ + ب ت = \pm (1 + 3 ت)$

$\therefore س = \frac{5 + ت \pm (1 + 3ت)}{2}$　　　$س = 3 + 2 ت$　　أو　　$س = 2 - ت$

حاول أن تحل

(6) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $س^2 + (1 + ت) س - 6 + 3ت = 0$

تمـــارين (2 - 2)

(1) باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(أ) $جتا 4\theta = 8 جتا^4 \theta - 8 جتا^2 \theta + 1$　　(ب) $جا 5\theta = 16 جا^5 \theta - 20 جا^3 \theta + 5 جا \theta$

(2) أوجد في ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية: اكتب الجذور على صورة س + ص ت:

(أ) $ع^4 = 16$　　(ب) $ع^3 + 8 = 0$　　(ج) $ع^3 + 8ت = 0$

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^5 + 243 = 0$ حيث $ع \in ك$

(4) أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^4 = 2 + 2\sqrt{3}$ ت. اكتب الحل على الصورة الأسية.

(5) أوجد الجذور التربيعية لكل من:

(أ) $2 - 2\sqrt{3}$ ت　　(ب) 1 - ت　　(ج) 8 ت

(د) 3 + 4 ت　　(هـ) 5 - 12 ت

(6) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8 ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

(7) أوجد الجذور الرابعة للعدد -1 ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

(8) إذا كان $\frac{7 - 11 ت}{4 + ت} = أ + ب ت$، أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-ب} + أ ت)^{\frac{2}{3}}$

(9) ضع العدد $2\sqrt{2}$ (1 + ت) على الصورة المثلثية، ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية.

(10) إذا كان ع = 8 - 6 ت أوجد $ع^{\frac{2}{3}}$ على الصورة الجبرية.

(11) **تفكير ابداعى:** أثبت أن $جتا^4 \theta = \frac{1}{8}$ (جتا 4θ + 4 جتا 2θ + 3)

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

Cubic roots of unity

سوف تتعلم

- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- تمثيل الجذور التكعيبية للواحد هندسيًا
- مرافق الأعداد أ + ω ، أ ت + ω

مصطلحات أساسية

- جذر *Root*
- جذر تربيعي *Square root*
- جذر تكعيبي *Cubic root*
- دائرة الوحدة *Unit circle*
- مرافق *Conjugate*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

عمل تعاوني :

باستخدام نظرية ديموافر أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^3 = 1$

أوجد الجذور السابقة بالصورة الجبرية.

أوجد مجموع الجذور الثلاثة . ماذا تلاحظ ؟

تعلم

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح *Cubic roots of unity*

باستخدام نظرية ديموافر نجد أن: مجموعة حل المعادلة $ع^3 = 1$ هي:

١ ، $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت.

ونلاحظ أن مربع أحد الجذرين المركبين يساوي الجذر الآخر؛

ولذلك يمكن أن نفرض الجذور التكعيبية على الصورة ١ ، ω ، ω^2

حيث $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

تفكير ناقد :

هل يمكنك إيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح باستخدام الصورة الجبرية للعدد المركب؟

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

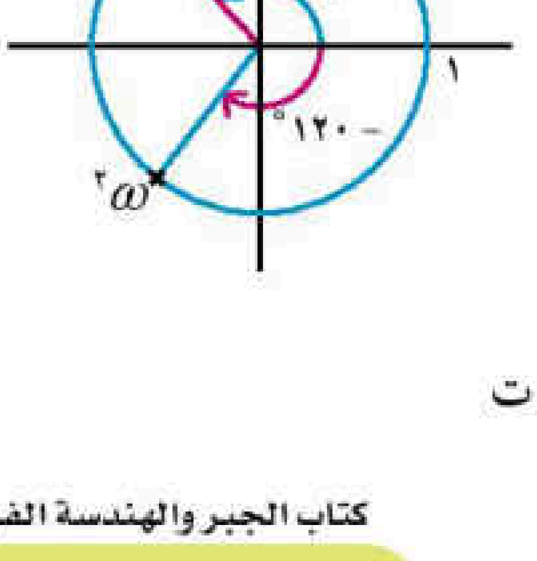
١- $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر (مجموع الجذور = صفر)

($1 + \omega = -\omega^2$ ، $1 + \omega^2 = -\omega$ ، $\omega + \omega^2 = -1$)

٢- $\omega^3 = 1$

($\frac{1}{\omega} = \omega^2$ ، $\frac{1}{\omega^2} = \omega$)

٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتكوّن رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.



٤- $(\omega - \omega^2) = \pm\sqrt{3}$ ت ، $(\omega^2 - \omega) = \pm\sqrt{3}$ ت

مثال

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ ، هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة كل من:

(أ) $٥ + ٥\omega + ٥\omega^{٢}$

(ب) $(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^{٢}})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^{٢})$

الحل

(أ) المقدار $= ٥ (١ + \omega + \omega^{٢})$ بأخذ العدد ٥ عامل مشترك

$= ٥ \times$ صفر $=$ صفر

(ب) المقدار $= (١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^{٢}})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^{٢})$ بالتعويض عن $\frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$ ، $\frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$

$= (١ - ٢\omega^{٢} - ٢\omega)(٣ + ٥\omega + ٥\omega^{٢}) = (١ - ٢(\omega^{٢} + \omega))(٣ + ٥(\omega + \omega^{٢}))$

$= (١ - ٢(-١))(٣ + ٥(-١)) = (١ + ٢)(٣ - ٥) = -٦$

حاول أن تحل

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة:

(أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٥}$

(ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢}(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٣}$

مثال

(٢) أثبت أن $[\frac{٥ - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٣\omega^{٢} - ٧}]^{٤} = ٩$

الحل

المقدار $= [\frac{٥ - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٣\omega^{٢} - ٧}]^{٤} = [\frac{٥\omega^{٣} - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢\omega^{٣} - ٧\omega}{٣\omega^{٢} - ٧}]^{٤}$

$= [\frac{\omega^{٢}(٥\omega - ٣)}{٥\omega - ٣} - \frac{\omega(٣\omega^{٢} - ٧)}{٣\omega^{٢} - ٧}]^{٤} = [\omega^{٢} - \omega]^{٤} = [\pm \sqrt{٣}\,\text{ت}]^{٤} = ٩$

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن $= [\frac{\text{أ} + \text{ب}\omega + \omega^{٢}\text{جـ}}{\omega^{٢}\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\omega^{٢} + \text{ب}\omega}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\omega^{٢} + \text{أ}}]^{٨} = ٨١$

مثال

(٣) أثبت أن س $= \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}$ هو أحد حلول المعادلة س^{١٠} + س^{٥} + ١ = صفر

الحل

$\because$ س $= \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$

أى إن س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

عندما س $= \omega$ فإن $\omega^{١٠} + \omega^{٥} + ١ = \omega^{١} + \omega^{٢} + ١ =$ صفر

عندما س $=$ س^{٢} فإن $\omega^{٢٠} + \omega^{١٠} + ١ = \omega^{٢} + \omega + ١ = ٠$

حاول أن تحل

(٢) كون المعادلة التربيعية التى جذراها $(١ + \omega - \omega^٢)^٣$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٣$

تمارين (٢ - ٣)

إذا كان ١، ω، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يأتى:

(١) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٢ =$ ....

(٢) $(\omega - \omega^٢)^٤ =$ ....

(٣) $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٢ =$ ....

(٤) إذا كان $س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ فإن $س^٨ + س^٤ =$ ....

(٥) $(\frac{١}{١ + \omega})(١ + \omega - \frac{٣}{\omega}) =$ ....

(٦) $١ + ٣\omega + ٣\omega^٢ =$ ....

(٧) إذا كان $أ = ٢\omega - ٣\omega^٢$ ، $ب = ٣ + ٥\omega^٢$ فإن $أ^٢ + ب^٢ =$ ....

(٨) $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^ر =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مرافق العدد ω يساوى

أ) ω ب) $\omega^٢$

ج) ١ د) $-\omega$

(١٠) $(\omega^٢ + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^٢})^٢ =$

أ) ٢ ب) صفر

ج) -٣ د) -٥

(١١) $(أ + ب\omega + أ\omega^٢)(أ + ب\omega^٢ + أ\omega^٤) =$

أ) ١ ب) أ - ب

ج) $(أ - ب)^٢$ د) $ب^٢ - أ^٢$

١٢ $(1 + 2\omega^{5} + \frac{1}{\omega^{2}})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^{4}}) =$

أ) صفر　　　ب) ١

ج) -١　　　د) ٢

١٣ $\frac{أ - ء\omega}{أ\omega^{2} - ء} - \omega^{2} =$

أ) ٣ت　　　ب) $\pm\sqrt{3}$ ت

ج) -٢　　　د) ٢

١٤ إذا كان $(1 + \omega)^{7} =$ أ + بω حيث أ ، ب عددان حقيقيان فإن (أ ، ب) =

أ) (٠ ، -١)　　　ب) (١ ، ١)

ج) (٠ ، ١)　　　د) (١ ، -١)

١٥ إذا كان $(1 + \omega)^{ن} = (1 + \omega^{2})^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هي

أ) ٢　　　ب) ٣

ج) ٥　　　د) ٦

١٦ $1 + \omega + \omega^{2} + \omega^{3} + ... + \omega^{100} =$

أ) صفر　　　ب) ١

ج) ω　　　د) $-\omega^{2}$

١٧ إذا كان ع = $\omega^{س}$ فإن | ع | = ... حيث س عدد صحيح موجب

أ) ١　　　ب) ω

ج) س　　　د) ω^{2}

١٨ $\sum_{ر=1}^{6} 1 + \omega^{ر} =$

أ) صفر　　　ب) ٦

ج) ١　　　د) $1 + \omega$

١٩ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $(1 - \omega + \omega^{2})(1 - \omega^{2} + \omega^{4})(1 - \omega^{4} + \omega^{8})(1 - \omega^{8} + \omega^{16}) = 2^{4}$

ب) $(\frac{\omega}{1 + 2\omega})^{2} + (\frac{1 + 2\omega^{2}}{\omega^{2}})^{2} = \frac{-10}{3}\omega^{2}$

ج) $[\frac{1}{1 + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{1 + \omega^{2} ت}]^{8} = 16$

د) $[\frac{5 - 3\omega^{2}}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^{2} - 7}]^{2} = -3$

هـ) $(1 + \omega^{2})^{8} = \omega^{2}$

و) $(1 - \omega^{2} + \omega^{4})^{2} + (1 + \omega^{2} + \omega^{4})^{2} = 4\omega$

٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتى:

أ) $5 + 3\omega + 3\omega^{2}$

ب) $(1 + \omega + 2\omega^{2})^{2} + (1 + 2\omega + \omega^{2})^{2}$

ج) $\dfrac{\omega^{2}(\omega - 1)(\omega^{2} - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^{2} + 2)}$

د) $\left[\dfrac{1}{1 + 3\omega^{2}} - \dfrac{1}{1 + 3\omega}\right]^{2}$

هـ) $(1 + \dfrac{1}{\omega} + ت)(1 + \dfrac{1}{\omega^{2}} + ت)$

٢١) إذا كان $س = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$ أثبت أن $س^{6} + 6س^{5} + 15س^{4} + 20س^{3} + 15س^{2} + 6س = 0$.

٢٢) إذا كان $\dfrac{1}{1 + \omega}$ ، $\dfrac{1}{1 + \omega^{2}}$ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة.

٢٣) إذا كان $ع = 2(\omega + ت)(\omega^{2} + ت)$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية.

٢٤) **تفكير إبداعى:** أوجد قيم ن التى تجعل $(2 + 5\omega + 2\omega^{2})^{ن} = (2 + 2\omega + 5\omega^{2})^{ن}$

٢٥) أوجد: أ) $\sum_{ر = صفر}^{10} \omega^{ر}$ ب) $\sum_{ر = صفر}^{10} (1 + \omega^{ر} + \omega^{2ر})$

الهندسة الفراغية

الوحدة الثالثة

الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

Geometry Measurement in two and three dimensions

مقدمة الوحدة

الهندسة هى علم دراسة مختلف أنواع الأشكال وصفاتها، كما أنها دراسة علاقة الأشكال والزوايا والمسافات ببعضها وتنقسم إلى جزأين:

الهندسة المستوية: وتختص بدراسة الأشكال الهندسية التى لها بعدين فقط، الهندسة الفراغية (الفضاء): وتختص بدراسة المجسمات التى لها ثلاثة أبعاد (طول، عرض، أرتفاع) وتتعامل مع فراغات مثل متوازى المستطيلات، والمجسمات الأسطوانية، والأجسام المخروطية والكروية.

وأول من استخدم الهندسة هم الأغريق واكتشف طاليس اثباتات لبعض النظريات ثم جمع أقليدس بعد ذلك كل النتائج الهندسية ونظمها فى كتاب أطلق عليه "المبادئ" ثم تطورت بعد ذلك إلى الهندسة التحليلية وهندسة المثلثات وهندسة منكوفسكى (ذات الأربعة أبعاد) والهندسة اللا إقليدية، وغيرها وفى هذه الوحدة سوف نتناول استخدام المتجهات فى دراسة المستقيمات والمستويات والعلاقة بينهما فى ثلاثة أبعاد.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال:
  - تمثيل المتجه بثلاثى مرتب.
  - متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠)، $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠، ١، ٠)، $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠، ٠، ١).
  - التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overrightarrow{\text{س}}$، $\overrightarrow{\text{ص}}$، $\overrightarrow{\text{ع}}$
  - التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها.
- يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف الزاوية بين متجهين فى الفراغ.
- يتعرف تعامد متجهين فالفراغ.
- يحدد زوايا الاتجاه وجيوب تمامالاتجاه لمتجه فى الفراغ.
- يستخدم حاصل الضرب القياسى لايجاد المركبة الجبرية والاتجاهية لمتجه فى اتجاه متجه آخر
- يتعرف المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى.
- يتعرف حاصل ضرب الثلاثى القياسى والمعنى الهندسى له.

مصطلحات أساسية

- فراغ space
- ثلاثى الأبعاد 3D
- مسقط projection
- قاعدة اليد اليمنى right hand Rule
- متجه ثلاثى الرتب 3D-vector
- مستوى plane
- ضرب قياسي scalar product
- ضرب اتجاهي vector product
- مركبة المتجه component
- الضرب الثلاثى القياسى scalar triple product
- متجه الوضع position vector
- متجه الوحدة unit vector
- معيار المتجه the norm of vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد.

الدرس (١ - ٢): المتجهات فى الفراغ.

الدرس (١ - ٣): ضرب المتجهات.

مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة الثالثة

٣ - ١ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

The three- dimensional orthogonal coordinate system

سوف تتعلم

- تحديد موقع نقطة فى النظام الإحداثى ثلاثي الأبعاد.
- تعين إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين فى الفراغ.
- إيجاد البعد بين نقطتين فى الفراغ.

مصطلحات أساسية

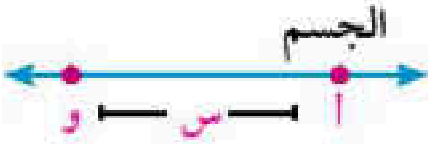
- فراغ space
- ثلاثي الأبعاد 3d
- مسقط projection
- قاعدة اليد اليمنى right hand rule
- مستوى plane

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

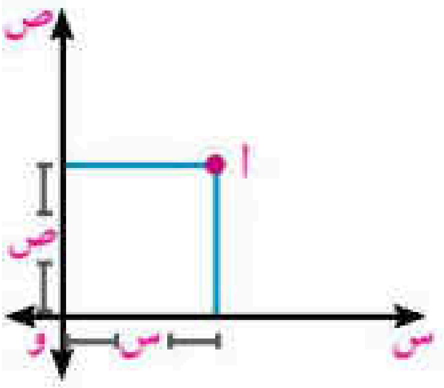
فكر وناقش

- لتحديد موضع جسم على خط مستقيم يلزم معرفة بُعد هذا الجسم عن نقطة ثابتة (اختيارية) عليه، وتسمى نقطة الأصل (و).



و أ = س ∋ ح

- لتحديد موضع جسم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسم على كل من محوري إحداثيات متعامدة.



أ = (س، ص) ∋ $ح^٢$

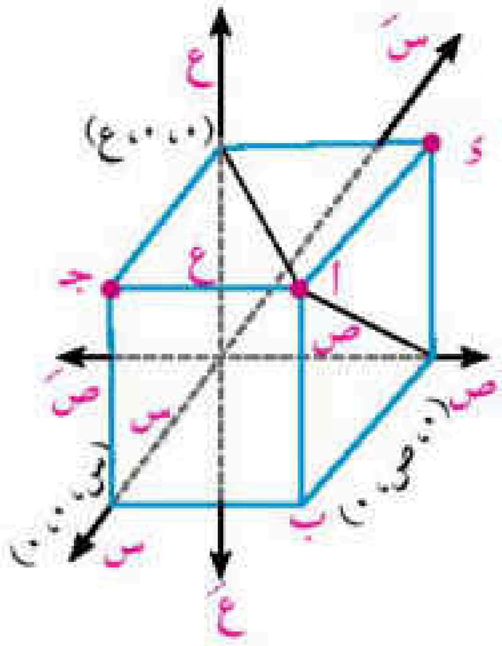
- كيف يمكنك تحديد موضع جسم فى الفراغ؟

تعلم

النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد ($ح^٣$)

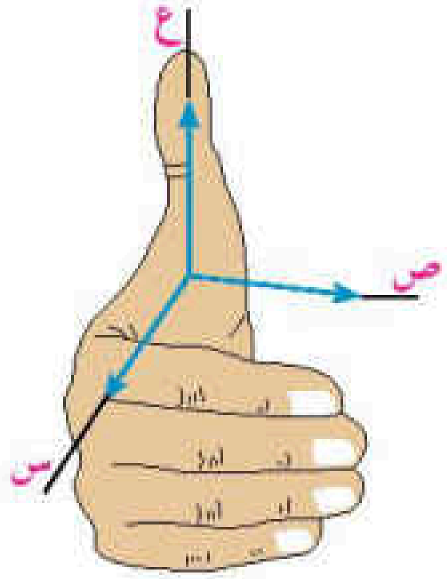
the three- dimensional orthogonal coordinate system (R^3)

تتعين إحداثيات النقطة أ فى الفراغ بالنسبة إلى ثلاثة محاور متقاطعة فى نقطة واحدة ومتعامدة مثنى مثنى، وذلك بإيجاد مسقط هذه النقطة على كل محور.



فكر: فى النظام ثلاثى الأبعاد الإحداثى السابق، أوجد إحداثيات كل من النقط ب، جـ، د

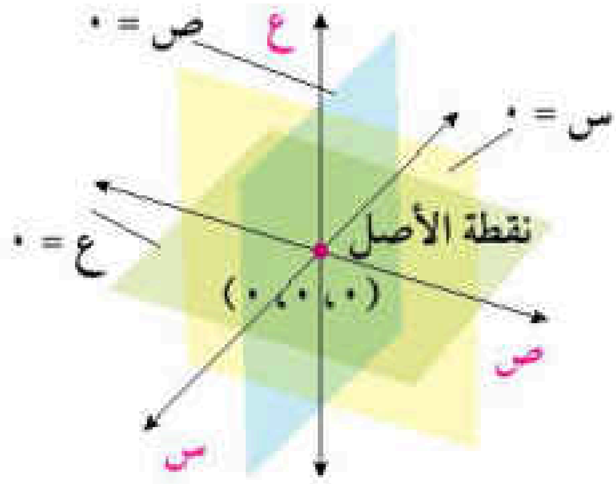
مفاهيم أساسية:



١- قاعدة اليد اليمنى

عند تكوين النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى: حيث تشير أصابع اليد المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلى الاتجاه الموجب لمحور ص، ويشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع.

٢- مستويات الإحداثيات



- جميع النقط فى الفراغ التي إحداثياتها (س، ص، ٠) تقع فى المستوى الإحداثى س ص وتكون معادلته **ع = صفر**
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س، ٠، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع وتكون معادلته **ص = صفر**
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (٠، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى ص ع وتكون معادلته **س = صفر**

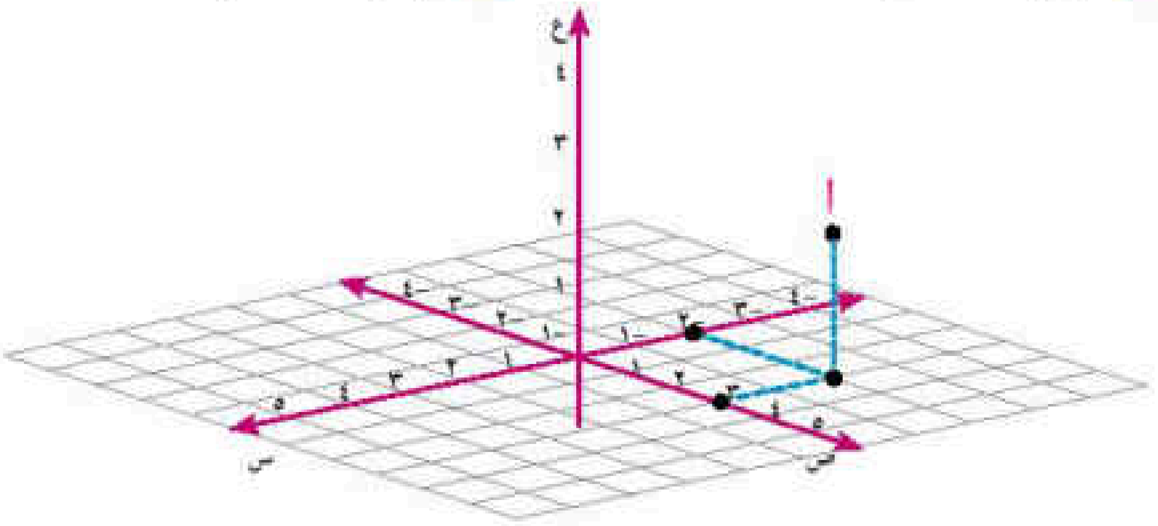
مثال

(تعيين موضع نقطة فى الفراغ)

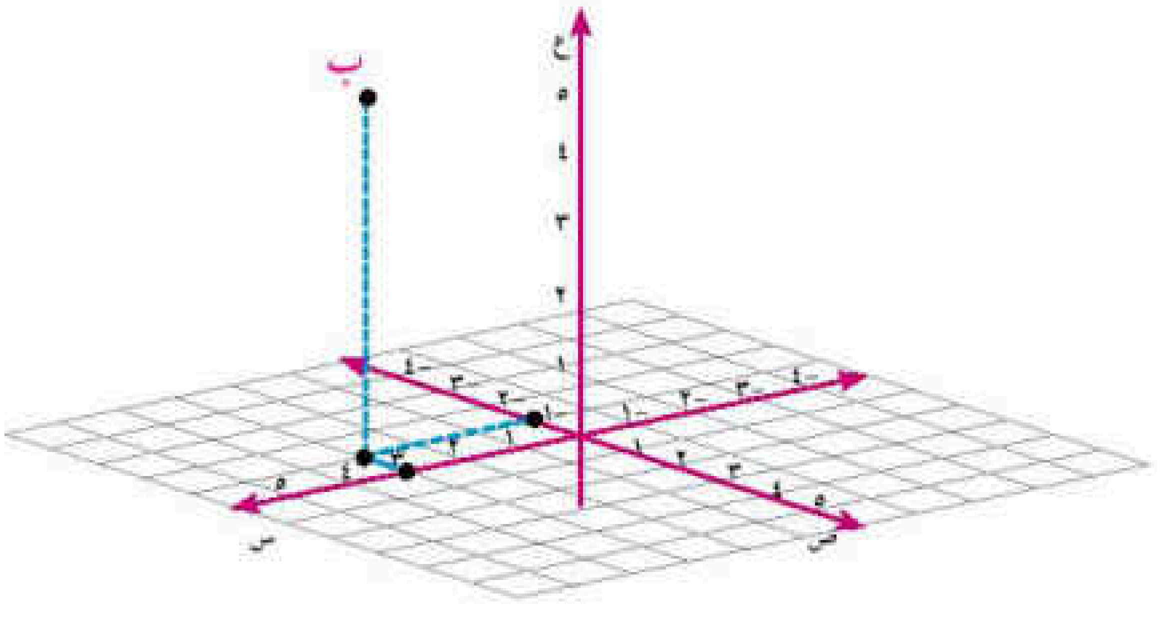
① عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

أ أ (-٢، ٣، ٢) ب ب (٣، -١، ٥) ج جـ (٤، ٠، -١)

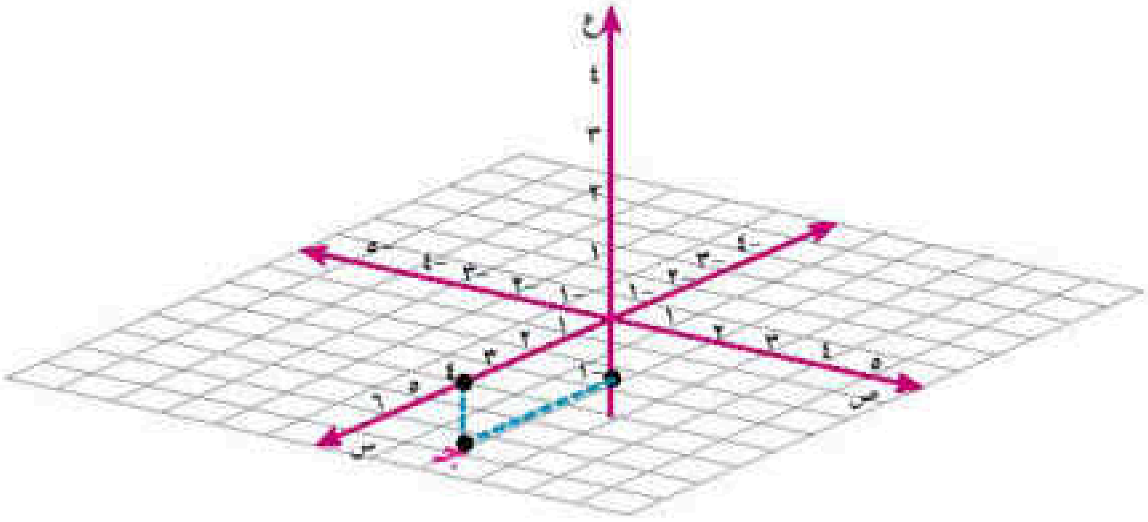
الحل



أ لتعيين النقطة أ (-٢، ٣، ٢) نحدد النقطة (-٢، ٣) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع وحدتين، فنحصل على النقطة أ (-٢، ٣، ٢)



ب لتعيين النقطة ب (٣، -١، ٥) نحدد النقطة (٣، -١) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع ٥ وحدات، فتحصل على النقطة ب.



ج لتعيين إحداثيات النقطة جـ (٤، ٠، -١) نحدد النقطة (٤، ٠) على محور س، ثم نتحرك فى الاتجاه السالب لمحور ع وحدة واحدة.

حاول أن تحل

١ أ عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

أ (٣، ٢، ٣) ب (-١، ٤، ٣) جـ (٠، ٠، ٤)

ب أكمل:

١- بُعد النقطة أ (-١، ٢، ٣) عن المستوى الإحداثى س ص = ... وحدة طول.

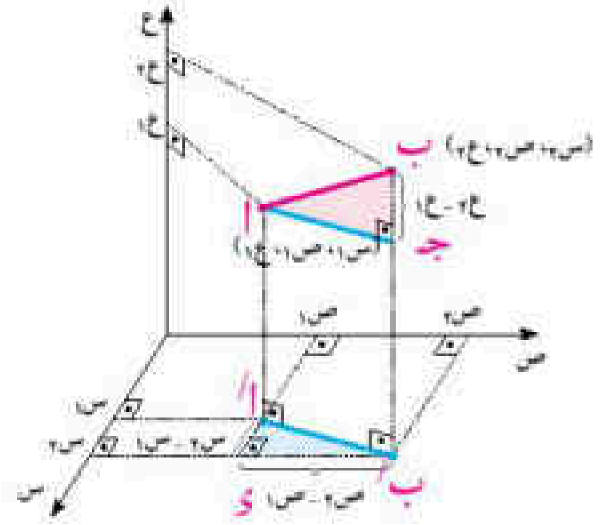
٢- بُعد النقطة ب (٤، -٢، ١) عن المستوى الإحداثى ص ع = ... وحدة طول.

تعلم

تعلم: البعد بين نقطتين فى الفراغ *the distance between two points in space*

إذا كانت أ ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$)، ب ($س_٢$، $ص_٢$، $ع_٢$) نقطتين فى الفراغ، فإن البُعد بين النقطتين أ، ب يعطى بالعلاقة

$$أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$



مثال

٢ أثبت أن المثلث أ ب جـ حيث أ (٢، -١، ٣) ، ب(-٤، ٤ ، ٢) ، جـ (-٢، ٥ ، ١) قائم الزاوية فى جـ.

الحل

$أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$ قانون البعد بين نقطتين

$= \sqrt{(٢ + ٤)^٢ + (-١ - ٤)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{٦٢}$

$ب جـ = \sqrt{(-٤ + ٢)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٦}$

$أ جـ = \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (-١ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{٥٦}$

∵ (أ ب)^{٢} = $(\sqrt{٦٢})^{٢}$ = ٦٢، (ب جـ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = $(\sqrt{٦})^{٢}$ + $(\sqrt{٦٥})^{٢}$ = ٦ + ٥٦ = ٦٢

∴ (أ ب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} ∴ ق($\hat{جـ}$) = ٩٠°

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن النقط أ(٤، ٤، ٠) ، ب(٤، ٠، ٤) ، جـ(٠، ٤، ٤) هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع، وأوجد مساحته.

تعلم

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة *The coordinates of midpoint of a line segment*

إذا كانت أ(س$_{١}$، ص$_{١}$، ع$_{١}$)، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$، ع$_{٢}$) نقطتان فى الفراغ، فإن إحداثيات نقطة جـ التى تقع منتصف $\overline{أب}$ هى:

$$جـ\left(\frac{س_{١}+س_{٢}}{٢}،\ \frac{ص_{١}+ص_{٢}}{٢}،\ \frac{ع_{١}+ع_{٢}}{٢}\right)$$

مثال

(٣) إذا كانت أ(١، -٣، ٢)، ب (٤، -١، ٤)، أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$

الحل

إحداثيات نقطة المنتصف $=\left(\frac{س_{١}+س_{٢}}{٢}،\ \frac{ص_{١}+ص_{٢}}{٢}،\ \frac{ع_{١}+ع_{٢}}{٢}\right)$

$=\left(\frac{١+٤}{٢}،\ \frac{-٣-١}{٢}،\ \frac{٢+٤}{٢}\right)$

$=\left(\frac{٥}{٢}،\ -٢،\ ٣\right)$

حاول أن تحل

(٣) أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{جـ ء}$ حيث جـ (٠، ٤، -٢)، ء(-٦، ٣، ٤)

تفكير ناقد: إذا كانت جـ (٢، ٢، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١، -٤ ، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

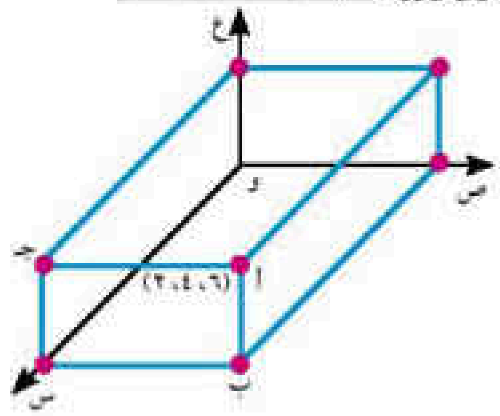
تمـــاريـن (٣-١)

أكمل ما يأتي:

(١) إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ص فإن ع = ...

(٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع'}$ يكونان المستوى الإحداثى .... الذي معادلته ....

(٣) الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات فى نظام إحداثي متعامد.
أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل و(٠، ٠، ٠)
فإن إحداثيات النقطة ب هى ....
و إحداثيات النقطة جـ هى ....



٤ إذا كانت أ (١، -١، ٤) ، ب (٠، -٣، ٢) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٥ بُعد النقطة (٣، -١، ٢) عن المستوى الإحداثي س ع يساوي .... وحدة طول

أ ٣ ب -١

جـ ٢ د ١

٦ طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ٣، ٤) على محور س يساوي .... وحدة طول.

أ ٢ ب ٣

جـ ٥ د ٤

٧ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (-٣، ٢، ٤)، (٥، ١، ٨) هى

أ (١، $\frac{٣}{٢}$، ٦) ب (٢، -١، ٤)

جـ (٨، -١، ٤) د (١، -$\frac{٣}{٢}$، ٢)

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨ أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب فى كل مما يأتي:

أ أ (٧، ٠، ٤)، ب (١، ٠، ٠) ب أ (٤، ١، ٩)، ب (٢، ١، ٦)

جـ أ (١، ١، -٧)، ب (-٢، -٣، -٧)

٩ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته:

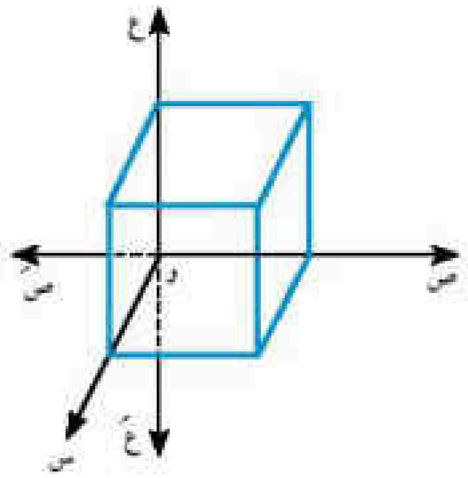
أ (-٢، ٥، ٢)، (٠، ٠، ٢)، (٠، ٤، ٠)

ب (-٤، ٤، ١)، (٢، -١، ٢)، (-٢، ٥، ٠)

١٠ الشكل المقابل يمثل مكعبًا حجمه ٢٧ وحدة مكعبة

أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل

أوجد إحداثيات باقي الرؤوس.



(١١) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط (٧، ١، ٣) ، (٥، ٣، ك)، (٣، ٥، ٣) هو مثلث متساوي الساقين، ثم أوجد قيمة (قيم) ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

(١٢) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ في كل مما يأتي:

أ) أ(٣، -١، ٤) ، ب (٢، ٠، -١) ب) أ(-٣، ٥، ٥) ، ب (-٦، ٤، ٨)

(١٣) إذا كانت جـ (-١، ٤، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث ب (٤، -٢، ١) أوجد إحداثيات النقطة أ.

(١٤) **تفكير ابداعي:**

إذا كانت أ ∋ محور س، ب ∋ محور ص، جـ ∋ محور ع وكانت النقطة (١، -١، صفر) منتصف $\overline{أب}$، والنقطة (٠، -١، ٢) منتصف $\overline{ب جـ}$. أوجد إحداثيات منتصف $\overline{أ جـ}$

(١٥) **الكتابة في الرياضيات:** إذا كانت جميع النقط في الفراغ التي على الصورة (س، ص، ٠) تقع في المستوى الديكارتي س ص ومعادلته ع = ٠. فأوجد معادلة المستوى الذي تقع فيه جميع النقط في الفراغ الذى على الصورة (س، ص، ٢)

(١٦) **اكتشف الخطأ:** إذا كانت النقطة ب (-١، ٤، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أ جـ}$ حيث أ(١ ، ٠ ، ٢) أوجد إحداثيات النقطة جـ

حل أشرف	حل زياد
جـ $= \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$	نفرض جـ (س، ص، ع)
$= \left(\frac{-1 + 1}{2} ، \frac{4 + 0}{2} ، \frac{2 + 2}{2}\right)$	∴ $\frac{1 + س}{2} = -1$ ⟵ س = -٣
= (٠، ٢، ٢)	$\frac{0 + ص}{2} = 4$ ⟵ ص = ٨
	$\frac{2 + ع}{2} = 2$ ⟵ ع = ٢
	∴ جـ (-٣، ٨، ٢)

أي الحلين صوابًا؟ ولماذا؟

الوحدة الثالثة

٣ - ٢ المتجهات فى الفراغ

Vectors in space

سوف تتعلم

- تمثيل المتجه بثلاث رتب.
- متجه الموضع فى الفراغ.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.
- تساوي متجهين فى الفراغ.
- معيار المتجه فى الفراغ.
- متجه الوحدة فى اتجاه متجه فى الفراغ.
- جمع المتجهات فى الفراغ.
- ضرب المتجهات فى عدد حقيقي.

مصطلحات أساسية

- متجه الموضع فى الفراغ *Position vector in space*
- معيار المتجه *the norm vector*
- متجه الوحدة *Unit vector*
- الضرب القياسي *Scalar product*
- الضرب الاتجاهي *Vector product*

مقدمة:

درست سابقًا الكميات القياسية والكميات المتجهة، وعلمت أن المتجه يُمثَّل بقطعة مستقيمة موجهة تحدد بمقدار (معيار المتجه)، واتجاه، وفي هذا الدرس نتناول المتجهات فى الفراغ، وهو (نظام إحداثي ذو ثلاثة أبعاد).

تعلم

متجه الموضع فى الفراغ *position vector in space*

يعرف متجه الموضع للنقطة ا $(ا_س ، ا_ص ، ا_ع)$ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة ا.

- ويرمز لمتجه موضع النقطة ا بالرمز $\overrightarrow{ا}$ أي أن $\overrightarrow{ا} = (ا_س ، ا_ص ، ا_ع)$
- $ا_س$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{ا}$ فى اتجاه محور س.
- $ا_ص$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{ا}$ فى اتجاه محور ص.
- $ا_ع$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{ا}$ فى اتجاه محور ع.

معيار المتجه *the norm of vector*

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

فإذا كان $\overrightarrow{ا} = (ا_س ، ا_ص ، ا_ع)$ فإن من قانون البعد بين نقطتين يكون

$$\|\overrightarrow{ا}\| = \sqrt{(ا_س)^٢ + (ا_ص)^٢ + (ا_ع)^٢}$$

مثال

① إذا كان $\overrightarrow{ا} = (٢، -١، ٣)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠، ٤، -٣)$ فإن

- مركبة المتجه $\overrightarrow{ا}$ فى اتجاه محور س هى ٢
- مركبة المتجه $\overrightarrow{ب}$ فى اتجاه محور ع هى -٣

$$\|\overrightarrow{ا}\| = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٤}$$

$$\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥$$

المتجه $\overrightarrow{ب}$ يقع فى المستوى الإحداثى ص ع (تنعدم مركبة $\overrightarrow{ب}$ فى اتجاه محور س

حاول أن تحل

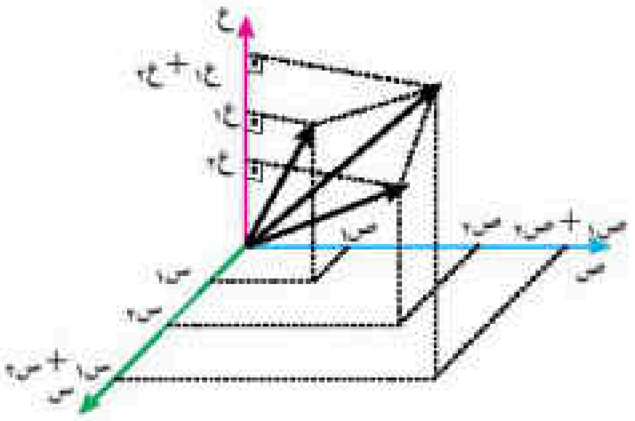
(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٤، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، ٠) أوجد

(أ) $أ_س + ب_ص$ (ب) $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

جمع المتجهات فى الفراغ *Adding 3 D vectors*

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ فإن:

$\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (أ_س + ب_س ، أ_ص + ب_ص ، أ_ع + ب_ع) = (جـ_س ، جـ_ص ، جـ_ع)$



مثال

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٣، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، -٢، ٤)، فإن:

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (-٢، ٣، ١) + (٠، -٢، ٤) = (-٢+٠، ٣+ (-٢)، ١+ ٤) = (-٢، ١، ٥)

حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤، -٤، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١، ٥، ٢) أوجد $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ

لأي متجهين $\overrightarrow{أ}$، $\overrightarrow{ب}$ ∋ $ح^٣$ فإن:

١- خاصية الانغلاق: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ∋ $ح^٣$

٢- خاصية الإبدال: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$

٣- خاصية التجميع: $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ})$

٤- العنصر المحايد الجمعي المتجه الصفري: $\overrightarrow{و}$ = (٠، ٠، ٠) هو العنصر المحايد الجمعي فى $ح^٣$
أي أن: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$

٥- المعكوس الجمعي: لكل متجه $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ∋ $ح^٣$ يوجد
$-\overrightarrow{أ} = (-أ_س ، -أ_ص ، -أ_ع)$ ∋ $ح^٣$ بحيث: $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى *Multiplying avector by ascalar*

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ∋ $ح^٣$ وكان ك ∋ ح فإن:

$ك\overrightarrow{أ} = ك(أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ك أ_س ، ك أ_ص ، ك أ_ع)$ ∋ $ح^٣$

فمثلًا: ٣ (٢، -١، ٤) = (٦، -٣، ١٢)

$\frac{1}{2}$ (٤، ٩، ٦) = (٢، $\frac{9}{2}$، ٣)

-٢ (١، -٣، -٤) = (-٢، ٦، ٨)

خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ∈ ح^٣^ وكان ك، ل ∈ ح فإن

١- خاصية التوزيع

- ك ($\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$
- (ك + ل) $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ل $\overrightarrow{أ}$

٢- خاصية الدمج

- ك (ل $\overrightarrow{أ}$) = ل (ك $\overrightarrow{أ}$) = (ك ل) $\overrightarrow{أ}$

مثال

٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٥، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤، -١، ٣) فإن

١- ٢ $\overrightarrow{أ}$ - ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ٢(-١، ٥، ٢) -٣ (٤، -١، ٣)

= (-٢، ١٠، ٤) + (-١٢، ٣، -٩)

= (-١٤، ١٣، -٥)

٢- أوجد المتجه $\overrightarrow{جـ}$ حيث ٢ $\overrightarrow{جـ}$ + ٣ $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$

∵ ٢$\overrightarrow{جـ}$ + ٣$\overrightarrow{أ}$ = ٢$\overrightarrow{ب}$ بإضافة -٣ $\overrightarrow{أ}$ للطرافين

∴ ٢$\overrightarrow{جـ}$ = ٢ $\overrightarrow{ب}$ - ٣$\overrightarrow{أ}$

∴ ٢$\overrightarrow{جـ}$ = ٢ (٤، -١، ٣) -٣ (-١، ٥، ٢)

= (٨، -٢، ٦) + (٣، -١٥، -٦)

= (١١، -١٧، ٠) بالضرب فى $\frac{1}{2}$

∴ $\overrightarrow{جـ}$ = $\frac{1}{2}$ (١١، -١٧، ٠) = ($\frac{11}{2}$، $\frac{-17}{2}$، ٠)

حاول أن تحل

٣ إذا كان $\overrightarrow{جـ}$ = (٢، -٣، ١)، $\overrightarrow{د}$ = (٠، ٢، -٢)

(أ) أوجد ٥$\overrightarrow{جـ}$ - ٢ $\overrightarrow{د}$

(ب) إذا كان ٣ $\overrightarrow{أ}$ - ٤ $\overrightarrow{د}$ = $\overrightarrow{جـ}$ فأوجد $\overrightarrow{أ}$

تساوى المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ فإن:

$\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$ **إذا و فقط إذا كان:** $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

مثال

(٤) أوجد قيمة ل ، م، ن التى تجعل المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ل} - ٤ ، \text{م}^٢ - ٣ ، ١)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٥ ، ١ ، \text{ن}^٢)$ متساويين

الحل

$\because \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore \text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}} \longrightarrow \text{ل} - ٤ = ٥ \longrightarrow \text{ل} = ٩$

$\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}} \longrightarrow \text{م}^٢ - ٣ = ١ \longrightarrow \text{م}^٢ = ٤ \longrightarrow \text{م} = \pm ٢$

$\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}} \longrightarrow \text{ن}^٢ = ١ \longrightarrow \text{ن} = \pm ١$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان $(٢\text{س} + ١ ، ٥ ، \text{ك} + ٤) = (-١ ، \text{ص}^٢ - ٤ ، \text{س} + ١)$ فما قيمة س، ص، ك؟

متجه الوحدة

يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلًا:

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\frac{-٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$ **متجه وحدة لأن:** $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\frac{-٣}{١٣})^٢ (\frac{٤}{١٣})^٢ + (\frac{١٢}{١٣})^٢} = ١$

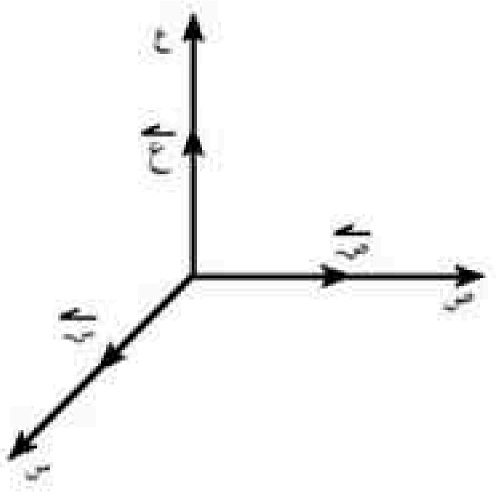
حاول أن تحل

(٥) بين أى المتجهات الآتية يمثل متجه وحدة

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{ب}} = (\frac{١}{٥} ، \frac{٤}{٥} ، \frac{-٢\sqrt{٥}}{٥})$

متجهات الوحدة الأساسية $(\overrightarrow{\text{س}} ، \overrightarrow{\text{ص}} ، \overrightarrow{\text{ع}})$

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل، ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س، ص، ع على الترتيب **أى إن:**



$\overrightarrow{\text{س}} = (١ ، ٠ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} = (٠ ، ١ ، ٠)$، $\overrightarrow{\text{ع}} = (٠ ، ٠ ، ١)$

وتسمى مجموعات المتجهات $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة الأساسية

تفكير ناقد

عبر عن المتجهات (-١، ٠، ٠) ، (٠، -١، ٠)، (٠، ٠، -١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

التعبير عن متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

إذا كان $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) \in ح^٣$ فإن المتجه $\vec{أ}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\vec{أ} = (أ_س ، ٠ ، ٠) + (٠ ، أ_ص ، ٠) + (٠ ، ٠ ، أ_ع)$$

$$= أ_س (١ ، ٠ ، ٠) + أ_ص (٠ ، ١ ، ٠) + أ_ع (٠ ، ٠ ، ١)$$

$$= أ_س \vec{س} + أ_ص \vec{ص} + أ_ع \vec{ع}$$

مثال

(٥) إذا كان $\vec{أ} = ٢\vec{س} - ٣\vec{ص} + \vec{ع}$ ، $\vec{ب} = -\vec{س} - ٢\vec{ص}$ أوجد

أ) $٢\vec{أ} - ٣\vec{ب}$ ب) $\|\vec{أ} + \vec{ب}\|$ ، $\|\vec{أ}\| + \|\vec{ب}\|$ ماذا تستنتج؟

الحل

أ) $٢\vec{أ} - ٣\vec{ب} = ٢(٢\vec{س} - ٣\vec{ص} + \vec{ع}) - ٣(-\vec{س} - ٢\vec{ص})$

$= ٤\vec{س} - ٦\vec{ص} + ٢\vec{ع} + ٣\vec{س} + ٦\vec{ص}$

$\therefore ٢\vec{أ} - ٣\vec{ب} = ٧\vec{س} + ٢\vec{ع}$

ب) $\vec{أ} + \vec{ب} = (٢\vec{س} - ٣\vec{ص} + \vec{ع}) + (-\vec{س} - ٢\vec{ص})$

$= \vec{س} - ٥\vec{ص} + \vec{ع}$

$\therefore \|\vec{أ} + \vec{ب}\| = \sqrt{١^٢ + (-٥)^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢٧}$

$\|\vec{أ}\| + \|\vec{ب}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ١^٢} + \sqrt{(-١)^٢ + (-٢)^٢}$

$= \sqrt{١٤} + \sqrt{٥}$ نلاحظ أن $\|\vec{أ} + \vec{ب}\| \neq \|\vec{أ}\| + \|\vec{ب}\|$

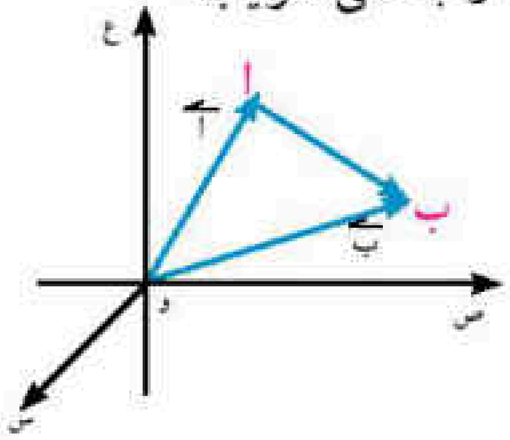
حاول أن تحل

(٦) إذا كان $\vec{أ} = -٣\vec{ص} - \vec{ع} + ٥\vec{س}$ ، $\vec{ب} = -٢\vec{ع} + ٣\vec{س}$ أوجد

أ) $٣\vec{أ} - ٥\vec{ب}$ ب) $\|\vec{أ} - \vec{ب}\|$

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها

بفرض أن أ، ب نقطتان فى الفراغ، متجها موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل هما $\vec{وأ}$ ، $\vec{وب}$ على الترتيب.



$\because \vec{وأ} + \vec{أب} = \vec{وب}$

$\therefore \vec{أب} = \vec{وب} - \vec{وأ}$

أو $\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

مثال

⑥ إذا كان أ (-٢، ٣، ١) ، ب (٤، ٠، ٢) فإن

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٤، ٠، ٢) - (-٢، ٣، ١) = (٦، -٣، ١)

$\overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$

= (-٢، ٣، ١) - (٤، ٠، ٢) = (-٦، ٣، -١)

نلاحظ أن: $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{بأ}$

حاول أن تحل

⑦ (أ) إذا كان أ (٢، -٣، ٠)، ب (١، ٤، -١) أوجد $\overrightarrow{أب}$

(ب) إذا كان أ (١، ١، -٢)، $\overrightarrow{أب}$ = (٤، -١، ٢) أوجد إحداثيات نقطة ب

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم *The unit vector in the direction of agiven vector*

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (أ_س، أ_ص، أ_ع) \in ح^3$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ى_أ}$ يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$$

مثال

⑦ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٢، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، -٢) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أب}$

الحل

$$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(-٢، ٢، ١)}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = (\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣})$$

$$\overrightarrow{ى_ب} = \frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(٣، ١، -٢)}{\sqrt{٩ + ١ + ٤}} = (\frac{٣}{\sqrt{١٤}}، \frac{١}{\sqrt{١٤}}، \frac{-٢}{\sqrt{١٤}})$$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٣، ١، -٢) - (-٢، ٢، ١) = (٥، -١، -٣)

$$\therefore \overrightarrow{ى_{أب}} = \frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$$

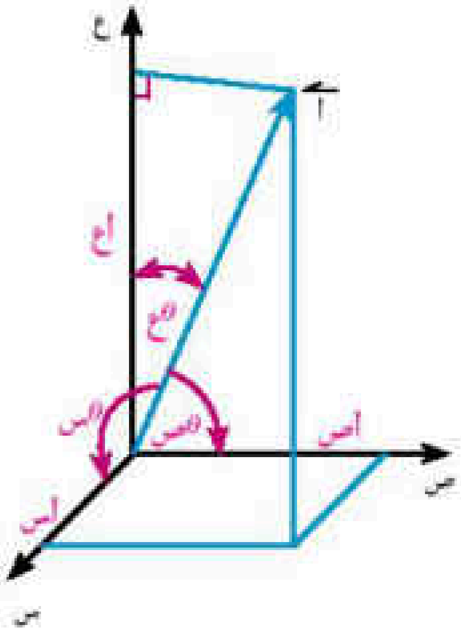
$$= \frac{(٥، -١، -٣)}{\sqrt{٢٥ + ١ + ٩}} = (\frac{٥}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-١}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-٣}{\sqrt{٣٥}})$$

حاول أن تحل

(٨) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٨، -٤، -٨) (ب) $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$ (ج) $\overrightarrow{\text{ج}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ع}}$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (أ$_{\text{س}}$، أ$_{\text{ص}}$، أ$_{\text{ع}}$) متجه فى الفراغ وكانت ($\theta_{\text{س}}$، $\theta_{\text{ص}}$، $\theta_{\text{ع}}$) قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س، ص، ع على الترتيب فإن:

أ$_{\text{س}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{س}}$ ، أ$_{\text{ص}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، أ$_{\text{ع}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{س}}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ص}}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ع}}$ $\overrightarrow{\text{ع}}$

= $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ (جتا $\theta_{\text{س}}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + جتا $\theta_{\text{ص}}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + جتا $\theta_{\text{ع}}$ $\overrightarrow{\text{ع}}$)

($\theta_{\text{س}}$، $\theta_{\text{ص}}$، $\theta_{\text{ع}}$) **تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$**

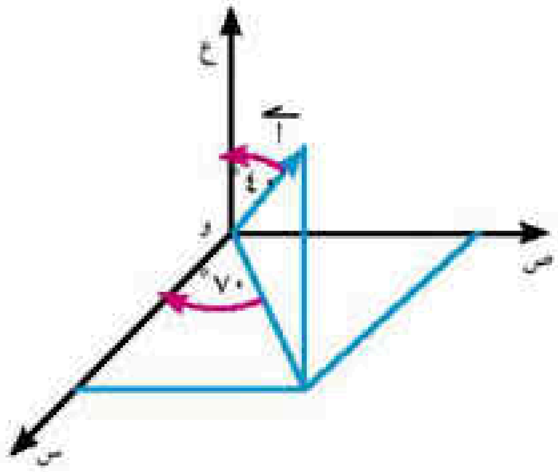
حيث $\theta_{\text{س}}$، جتا $\theta_{\text{ص}}$، جتا $\theta_{\text{ع}}$ ∈ [٠ ، π]

جتا $\theta_{\text{س}}$، جتا $\theta_{\text{ص}}$، جتا $\theta_{\text{ع}}$ **تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$**

لاحظ أن: جتا $\theta_{\text{س}}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + جتا $\theta_{\text{ص}}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + جتا $\theta_{\text{ع}}$ $\overrightarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ أى إن

جتا^{٢} $\theta_{\text{س}}$ + جتا^{٢} $\theta_{\text{ص}}$ + جتا^{٢} $\theta_{\text{ع}}$ = ١

مثال



(٨) الشكل المقابل يمثل متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ معياره ١٠ وحدات

(أ) عبر عن المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

الحل

أولًا نحلل $\overrightarrow{\text{أ}}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وع}}$ ومقدارها

أ$_{\text{ع}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا $\theta_{\text{ع}}$ = ١٠ جتا ٤٠ = ٧,٦٦

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص

أ$_{\text{س ص}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جا $\theta_{\text{ع}}$ = ١٠ جا ٤٠ = ٦,٤٢٨

الآن نحلل المركبة أ$_{\text{س ص}}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وس}}$ ومقدارها

أ$_{\text{س}}$ = أ$_{\text{س ص}}$ جتا ٧٠ = ٦,٤٢٨ جتا ٧٠ = ٢,١٩٩

والثانية فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وص}}$ ومقدارها

أ$_{\text{ص}}$ = أ$_{\text{س ص}}$ جا ٧٠ = ٦,٤٢٨ جا ٧٠ = ٦,٠٤

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى

$\overrightarrow{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}$

$= ٢,١٩٩ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع}$

ثانيًا: ولإيجاد قياسات زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ى} = \frac{\overrightarrow{أ}}{||\overrightarrow{أ}||} = \frac{١}{١٠}(٢,١٩٩ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع})$

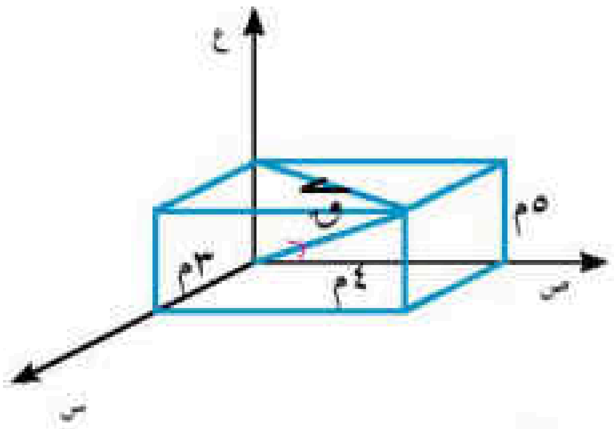
$= ٠,٢١٩٩ \overrightarrow{س} + ٠,٦٠٤ \overrightarrow{ص} + ٠,٧٦٦ \overrightarrow{ع}$

∴ جتا $\theta_س = ٠,٢١٩٩$ ومنها $\theta_س =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٢١٩٩) = ٧٧,٣°$

جتا $\theta_ص = ٠,٦٠٤$ ومنها $\theta_ص =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٦٠٤) = ٥٢,٨٤°$

جتا $\theta_ع = ٠,٧٦٦$ ومنها $\theta_ع =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٧٦٦) = ٤٠°$

حاول أن تحل



٩) الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

أ) عبر عن القوة $\overrightarrow{ق}$ بالصورة الجبرية.

ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overrightarrow{ق}$.

تمـاريـن (٣-٢)

أكمل ما يأتى:

١) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٣، ٤، ٢)$ فإن $||\overrightarrow{أ}|| =$ ....

٢) إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ فإن $\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} =$ ....

٣) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ (-١، ٢، ٠) ، ب (٣، -١، ٢) هو ....

٤) المتجه $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور س.

٥) المتجه $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور ع.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٢، ك، ١)$ وكان $||\overrightarrow{أ}|| = ٣$ وحدات فإن ك = ...

أ) ٤ ب) -٤ جـ) ± ٢ د) $\sqrt{١٤}$

٧ إذا كان ٣٠°، ٧٠°، θ هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن احدى قيم θ = ...

أ ١٠٠°   ب ٨٠°   جـ ٢٦٠°   د ٦٨,٦١°

٨ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٥، -٢)، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، ١) وكان $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{س}$ فإن $\overrightarrow{جـ}$ = ...

أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ ب -$\overrightarrow{س}$ - ٦ $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$

جـ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ - ٣ $\overrightarrow{ع}$ د $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$

٩ جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ١، ٢) هى ....

أ (-٢، ١، ٢)   ب ($\frac{-٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$)   جـ ($\frac{٥}{-٢}$، ٥، $\frac{٥}{٢}$)   د (-١، ١، ١)

أجب عما يأتى:

١٠ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢، -٣، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤، -٢، ٠) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (-٦، ٠، ٣) أوجد كلًّا من المتجهات الآتية:

أ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ب ٣ $\overrightarrow{أ}$ - $\frac{١}{٣}$ $\overrightarrow{جـ}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ $\overrightarrow{ب}$ + $\frac{٢}{٣}$ $\overrightarrow{جـ}$

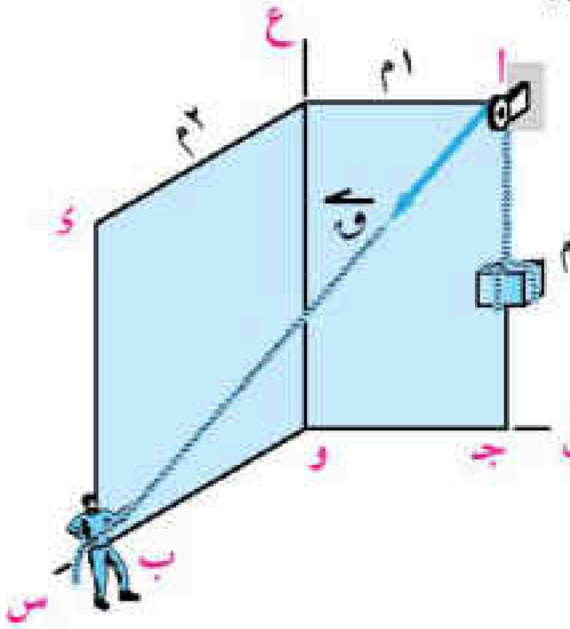
١١ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{ص}$ - ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ - ٦ $\overrightarrow{ع}$ أوجد كلًّا من المتجهات الآتية:

أ ٢ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ب $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{جـ}$ جـ ٣ $\overrightarrow{أ}$ - ٢ $\overrightarrow{جـ}$

١٢ أوجد معيار كل من المتجهات الآتية:

أ $\overrightarrow{أ}$ = (٢، -١، ٠)   ب $\overrightarrow{ب}$ = (١، ٢، -٢)   جـ $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{ع}$ د $\overrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$

١٣ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ك، ٠، ٠) ، $\overrightarrow{س}$ = (١، ٠، ٠) أثبت أن || $\overrightarrow{أ}$ || = |ك| || $\overrightarrow{س}$ ||



١٤ إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاهات محاور الاحداثيات.

١٥ **سؤال مفتوح:** إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يوازى المستوى الإحداثى ص ع . ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{أ}$

١٦ **سؤال مفتوح:** إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى $ح^٣$. هل || $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ || = || $\overrightarrow{أ}$ || + || $\overrightarrow{ب}$ || إذا كان الطرفان غير متساويين. أىُّ الطرفين هو الأكبر؟

١٧ **تفكير ابداعى:** أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٥ وحدات، ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس.

الوحدة الثالثة

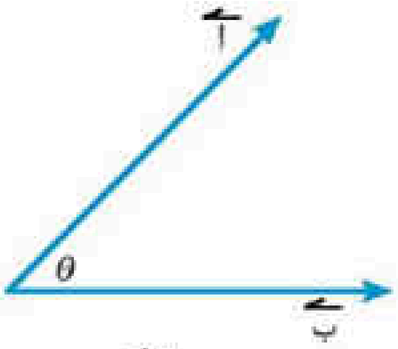
٣ - ٣ ضرب المتجهات

Vectors multiplication

تعلمت سابقًا إجراء بعض العمليات على المتجهات، مثل الجمع وضرب المتجه فى عدد حقيقى، ولكنك قد تكون قد تساءلت: هل يمكن إجراء عملية الضرب فى حقل المتجهات؟ والجواب: نعم. هناك نوعان من ضرب المتجهات، هما الضرب القياسى لمتجهين والضرب الاتجاهى لمتجهين. وفى هذا الدرس نتناول هذين النوعين من الضرب بالشرح والتحليل، وخواصهما الجبرية والهندسية، وتطبيقاتهما الفيزيائية؛ ليكون ذلك معينًا لك فى دراسة الميكانيكا.

الضرب القياسى لمتجهين — *Scalar product of two vectors (Dot product)*

فكر و ناقش

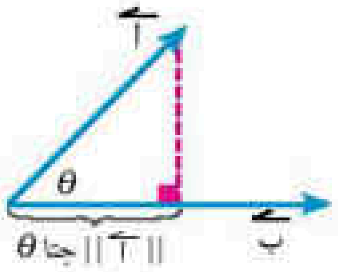


إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فأوجد:

١- المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

من بند فكر وناقش نستنتج أن:



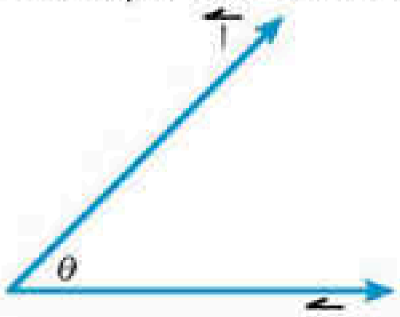
١- المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ تساوى $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتاθ

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ والمركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ يساوى $\|\overrightarrow{ب}\|\,\|\overrightarrow{أ}\|$ جتاθ

والقيمة المطلقة لهذا المقدار تعبر عن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ ومعيار مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين — *Scalar product of two vectors*



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه تعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز لهما بالرمزين $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

سوف تتعلم

- الضرب القياسى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- توازى وتعامد متجهين.
- الزاوية بين متجهين.
- مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر.
- مسقط متجه فى اتجاه متجه آخر.
- الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الاتجاهى.
- المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة.
- حاصل الضرب الثلاثى القياسى.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

مصطلحات أساسية

- ضرب قياسى *scalar product*
- ضرب اتجاهى *vector product*
- مركبة *component*
- متجه الوحدة *unit vector*
- الشغل *work*
- قاعدة اليد اليمنى *right hand rule*
- الضرب الثلاثى القياسى *scalar triple product*

أى إن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

مثال

(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية ٦٠° وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ ⟵ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٨ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٤

من تعريف الضرب القياسى

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

= ٨ × ٤ × جتا ٦٠° = ١٦

حاول أن تحل

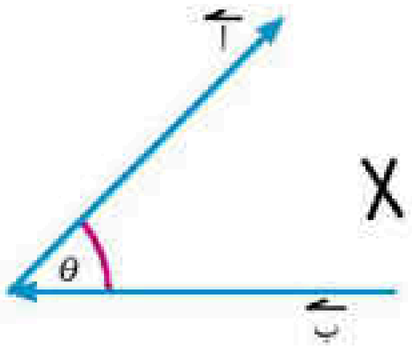
(١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٦ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ١٠ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

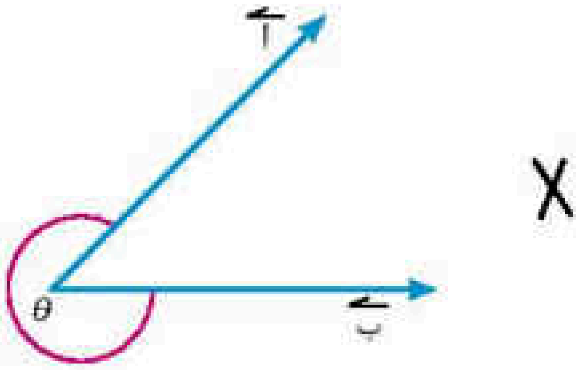
تفكير ناقد: ما الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى الصفر؟

ملحوظات مهمة

١- لتحديد الزاوية بين المتجهين يجب أن يكون المتجهان خارجين (أو داخلين) لنفس النقطة.

٢- قياس الزاوية بين المتجهين ∈ [٠ ، π]





مثال

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية، فأوجد كل من $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{س}}\| \, \|\overrightarrow{\text{س}}\|$ جتا ٠°

= ١ × ١ × ١ = ١

بالمثل $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ = ١ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$ = ١

تذكر أن

معيار متجه الوحدة يساوى الواحد الصحيح.

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة، فأوجد كل من $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}}$

خواص الضرب القياسى

من الأمثلة السابقة يمكننا استنتاج خواص الضرب القياسى كما يلى:

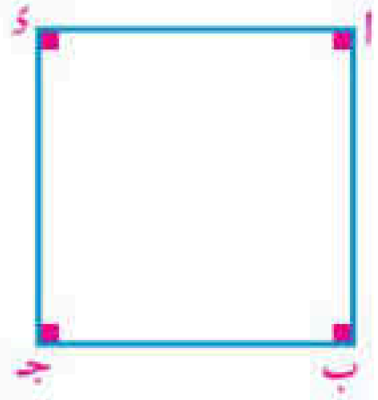
١-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$	خاصية الإبدال
٢-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \lVert\overrightarrow{\text{أ}}\rVert^{٢}$	
٣-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$	إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين (شرط تعامد متجهين)
٤-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$	خاصية التوزيع
٥-	$(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}\,(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$	حيث ك عددًا حقيقيًا

مثال

(٢) اب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم . أوجد كلًّا من

(أ) $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (ج) $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـا}}$

الحل



(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه

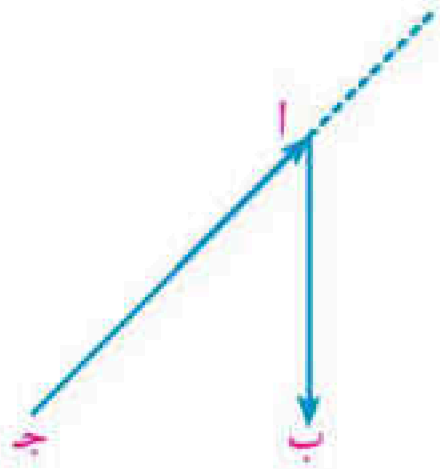
∴ قياس الزاوية بينهما = صفر°

∴ $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \lVert\overrightarrow{\text{اب}}\rVert\,\lVert\overrightarrow{\text{ءجـ}}\rVert$ جتا ٠°

$= ١٠ \times ١٠ \times ١ = ١٠٠$

(ب) $\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ متعامدان   **قياس الزاوية بينهما ٩٠°**

∴ $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ = صفر



(ج) ∵ $\overrightarrow{\text{اب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـا}}$ **لا يبدآن من نفس النقطة**

∴ نمد $\overrightarrow{\text{جـا}}$ على امتداده فتصبح قياس الزاوية بينهما ١٣٥°

$\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـا}} = \lVert\overrightarrow{\text{اب}}\rVert\,\lVert\overrightarrow{\text{جـا}}\rVert$ جتا ١٣٥

$= ١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

حل آخر الفقرة (ج)

$\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـا}} = \overrightarrow{\text{اب}} \cdot (-\overrightarrow{\text{اجـ}})$

$= -\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{اجـ}}$

$= -\lVert\overrightarrow{\text{اب}}\rVert\,\lVert\overrightarrow{\text{جـا}}\rVert$ جتا ٤٥

$= -١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

حاول أن تحل

٣ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم. أوجد كلًّا من:

أ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}}$ ب $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ جـ $(٢\ \overrightarrow{\text{أب}}) \cdot (٣\overrightarrow{\text{جـب}})$

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد

The scalar product of two vectors in orthogonal coordinate system

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$، $\text{ب} = (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$ فإن

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}) \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$ **باستخدام خاصية التوزيع**

$$= \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}}\cdot\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{س}}\cdot\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{س}}\cdot\vec{\text{ع}}$$

$$+ \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{ص}}\cdot\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}}\cdot\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ص}}\cdot\vec{\text{ع}}$$

$$+ \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{ع}}\cdot\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ع}}\cdot\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}\cdot\vec{\text{ع}}$$

وحيث إن $\vec{\text{س}}\cdot\vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}\cdot\vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}\cdot\vec{\text{ع}} = ١$

$\vec{\text{س}}\cdot\vec{\text{ص}} = \vec{\text{ص}}\cdot\vec{\text{ع}} = \vec{\text{ع}}\cdot\vec{\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$

ملاحظة

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}$

مثال

٤ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\vec{\text{س}} + ٣\vec{\text{ص}} + ٤\vec{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}} + \vec{\text{ع}}$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = (٢، ٣، ٤) \cdot (-١، -٢، ١)$

$= ٢ \times -١ + ٣ \times (-٢) + ٤ \times ١$

$= -٢ - ٦ + ٤ = -٤$

حاول أن تحل

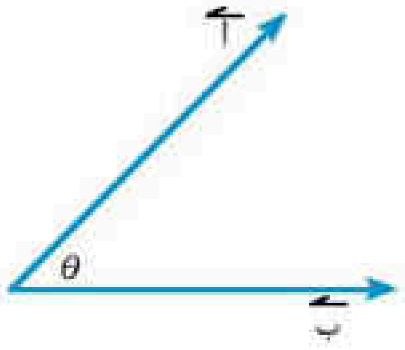
٤ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

أ $\overrightarrow{\text{أ}} = (-١، ٣، ٢)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٤\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}} + ٥\vec{\text{ع}}$ ماذا تستنتج؟

ب $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \vec{\text{ص}} - ٣\vec{\text{س}}$

تعلم

الزاوية بين متجهين
the angle between two vectors



تعلم أن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $٠° \le \theta \le ١٨٠°$

$\therefore$ جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|}$

حالات خاصة:

١- إذا كان جتا $\theta = ١$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان، وفى نفس الاتجاه.

٢- إذا كان جتا $\theta = -١$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان، وفى عكس الاتجاه.

٣- إذا كان جتا $\theta = ٠$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

مثال

⑤ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ} = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$.

الحل

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٤^٢ + ٣^٢ + ٧^٢} = \sqrt{٧٤}$

$\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٢^٢ + ٥^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٤٥}$

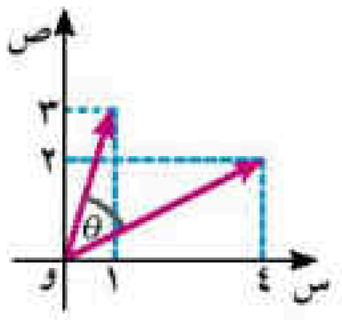
جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|}$

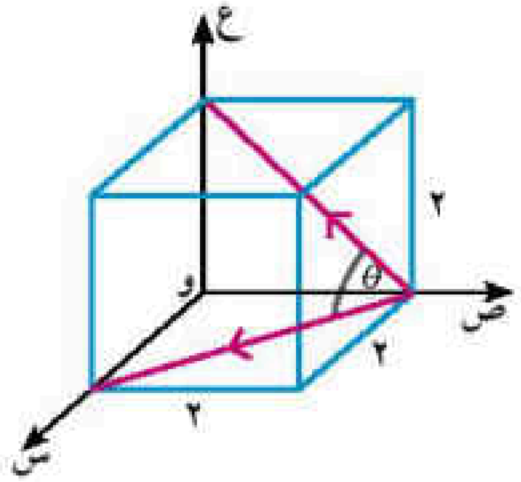
$= \dfrac{(٤، ٣، ٧) \cdot (٢، ٥، ٤)}{\sqrt{٧٤}\,\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٨ + ١٥ + ٢٨}{\sqrt{٧٤}\,\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\,\sqrt{٤٥}}$

$\therefore$ جتا$^{-١}\left(\dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\,\sqrt{٤٥}}\right) =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٨٨٣٨) = ٢٧,٩°$

حاول أن تحل

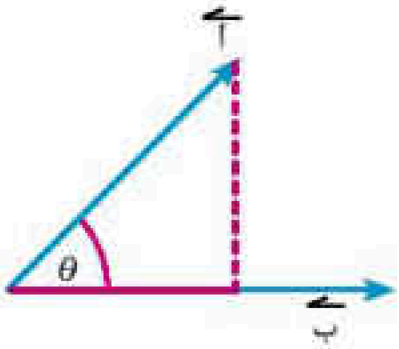
⑤ أوجد θ فى كل مما يأتى:





تعلم

مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر.



إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، فإن مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ (ويرمز لها $\text{أ}_{\text{ب}}$) هى

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$$

ملحوظة: المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ يرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}}_{\text{ب}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ}}_{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{ب}} \dfrac{\overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

مثال

٦) أوجد مركبة القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\overleftarrow{\text{ع}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ(١، ٤، ٠)، ب(-١، ٢، ٣)

الحل

$$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$$

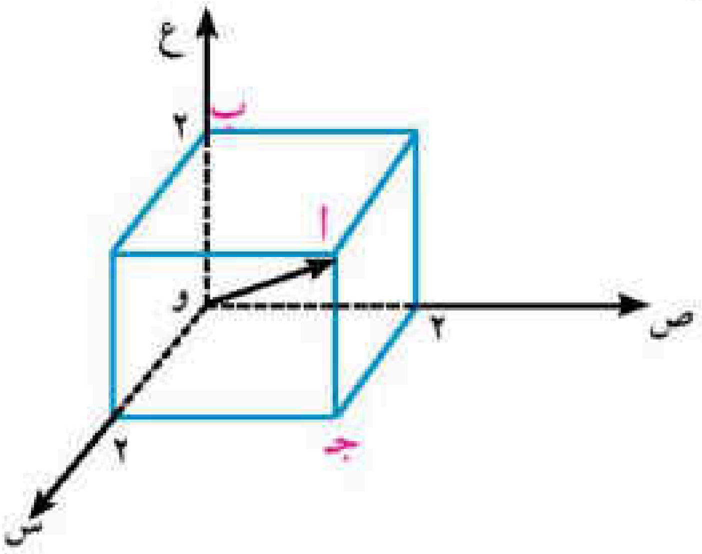
$$= (-١، ٢، ٣) - (١، ٤، ٠) = (-٢، -٢، ٣)$$

$$\text{مركبة القوة } \overleftarrow{\text{ق}} \text{ فى اتجاه } \overleftarrow{\text{أب}} = \frac{\overleftarrow{\text{ق}} \cdot \overleftarrow{\text{أب}}}{\|\overleftarrow{\text{أب}}\|}$$

$$= \frac{(٢، -٣، ٥) \cdot (-٢، -٢، ٣)}{\sqrt{(-٢)^{٢} + (-٢)^{٢} + ٣^{٢}}} = \frac{١٧}{\sqrt{١٧}} = \sqrt{١٧}$$

حاول أن تحل

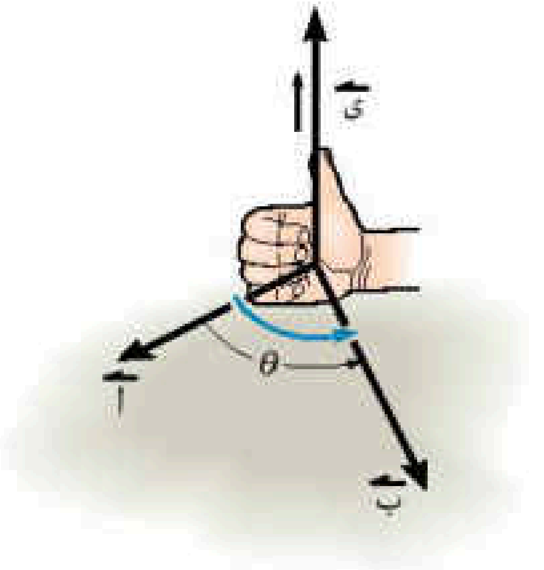
٦) الشكل المقابل يمثل مكعبًا طول ضلعه ٢ وحدة طول أوجد مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overleftarrow{\text{جـب}}$



تفكير ناقد: متى تنعدم مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر؟

تعلم

الضرب الاتجاهى لمتجهين
Vector product of two vectors (cross product)

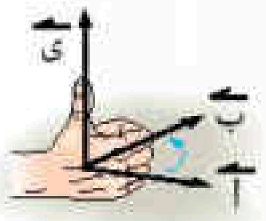


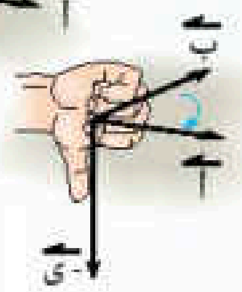
إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى مستوى، يحصران بينهما زاوية قياسها θ وكان $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عموديًا على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ **فإن** حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يُعطى بالعلاقة

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (||\overrightarrow{أ}||\ ||\overrightarrow{ب}||\ جا\ \theta)\ \overrightarrow{ى}$$

ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم أسفل) طبقًا لقاعدة اليد اليمنى، حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\overrightarrow{أ}$ إلى المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$

ملحوظات هامة





١- **إذا كان** $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$ فإن $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ تكون فى اتجاه المتجه $-\overrightarrow{ى}$ **أى أن** $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$

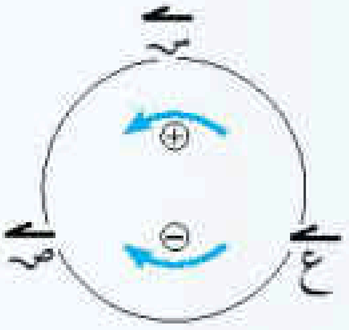
٢- بتطبيق قاعدة اليد اليمنى على مجموعة يمينية من متجهات الوحدة المتعامدة **فإن**

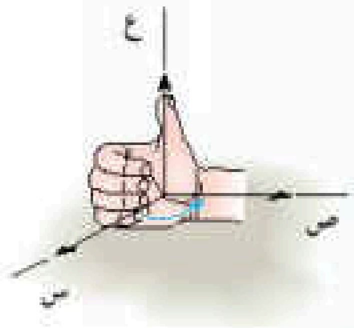
$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$





٣- لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ يكون $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى

مثال

٧ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان فى مستوى، قياس الزاوية بينهما ٧٠° فإذا كان $||\overrightarrow{أ}|| = ١٥$ ، $||\overrightarrow{ب}|| = ١٧,٥$ أوجد معيار $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

الحل

$\because\ \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (||\overrightarrow{أ}||\ ||\overrightarrow{ب}||\ جا\ \theta)\ \overrightarrow{ى}$

$\therefore\ ||\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}|| = ||\overrightarrow{أ}||\ ||\overrightarrow{ب}||\ جا\ \theta = ١٥ \times ١٧,٥ \times جا\ ٧٠ = ٢٤٦,٦٧$

حاول أن تحل

(٧) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -٦٥\ \overrightarrow{\text{ى}}$ وكان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٢٦$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}}، \text{ب}_{\text{ع}})$ متجهين **فإن**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}) \times (\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}})$$

$$= \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ع}}$$

$$+ \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}}$$

$$+ \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ع}}$$

وحيث إن $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}}$ فإن

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = ٠ + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ع}} + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}}(-\overrightarrow{\text{ص}})$$

$$+ \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}(-\overrightarrow{\text{ع}}) + ٠ + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}}(\overrightarrow{\text{س}})$$

$$+ \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}(\overrightarrow{\text{ص}}) + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}(-\overrightarrow{\text{س}}) + ٠$$

$$= (\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}})\overrightarrow{\text{س}} + (\text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}} - \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}})\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}}$$

والصورة الأخيرة يمكن كتابتها على شكل محدد على النظم ٣ × ٣ كالآتى:

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

حالة خاصة

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى س ص **فإن**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & ٠ \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & ٠ \end{vmatrix} = (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}}$$

مثال

⑧ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢، ٣، ١)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١، ٢، ٤)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ثم استنتج متجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= (٣ \times ٤ - ٢ \times ١)\,\overrightarrow{\text{س}} - (-٢ \times ٤ - ١ \times ١)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (-٢ \times ٢ - ٣ \times ١)\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= ١٠\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٧\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

متجه الوحدة العمودى على مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ى}} = \frac{١٠\,\overrightarrow{\text{س}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٧\,\overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{١٠^{٢} + ٩^{٢} + (-٧)^{٢}}} = \frac{١٠}{\sqrt{٢٣٠}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٩}{\sqrt{٢٣٠}}\,\overrightarrow{\text{ص}} - \frac{٧}{\sqrt{٢٣٠}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

حاول أن تحل

⑧ إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان المتجه $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢، ٣، ٥)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن:

١- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ **(الضرب الاتجاهى عملية غير إبدالية)**

٢- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

٣- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإما $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى $\overrightarrow{\text{و}}$

٤- $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) + (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{جـ}})$ **خاصية التوزيع**

٥- $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ **حيث ك عدد حقيقى**

توازى متجهين

رأينا فى خواص الضرب الاتجاهى أن المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

أى $(\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}})\,\overrightarrow{\text{س}} + (\text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}} - \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}})\,\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\,\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و}}$

أى $أ_ص \, ب_ع = أ_ع \, ب_ص$ ، $أ_س \, ب_ع = أ_ع \, ب_س$ ، $أ_س \, ب_ص = أ_ص \, ب_س$

أى $\frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ ، $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ ، $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص}$

أى $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

وبفرض أى من النسب = ك يكون

$أ_س = ك \, ب_س$ ، $أ_ص = ك \, ب_ص$ ، $أ_ع = ك \, ب_ع$

$\therefore \overrightarrow{أ} = أ_س \, \overrightarrow{س} + أ_ص \, \overrightarrow{ص} + أ_ع \, \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ك \, \overrightarrow{ب}$

عندما تكون ك > ٠ يكون المتجهان متوازيين وفى نفس الاتجاه، وعندما تكون ك < ٠ يكون المتجهان متوازيين وفى عكس الاتجاه.

مثال

(٩) إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ} = (٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + م \, \overrightarrow{ع})$ يوازى المتجه $\overrightarrow{ب} = (\overrightarrow{س} + ك\overrightarrow{ص} + ٨\overrightarrow{ع})$ أوجد قيمة كل من م، ك

الحل

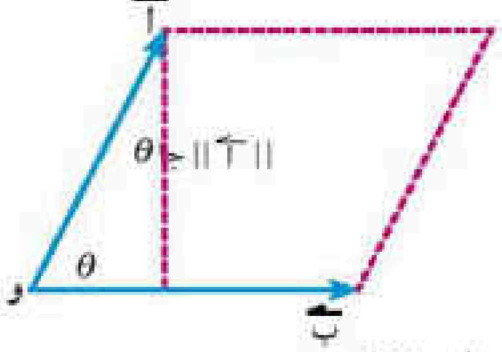
$\because \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ $\qquad \therefore \frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

$\therefore \frac{٢}{١} = \frac{-٣}{ك} = \frac{م}{٨}$ $\qquad \therefore ك = \frac{١ \times -٣}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ ، $م = \frac{٢ \times ٨}{١} = ١٦$

حاول أن تحل

(٩) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢، -٣)$ وكان $\overrightarrow{ب} \parallel \overrightarrow{أ}$ فإذا كان $\| \overrightarrow{ب} \| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد $\overrightarrow{ب}$.

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين



نعلم أن $\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \| = \| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|$ جا θ

$= \| \overrightarrow{ب} \| \times ل$ حيث $ل = \| \overrightarrow{أ} \|$ جا θ

= مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

مثال

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٤ ، -١)$ أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران فيه.

الحل

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (-٣ ، ١ ، ٢) \times (٣ ، ٤ ، -١)$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = (-٩)\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص} - ١٥\,\overrightarrow{ع}$$

$$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(-٩)^٢ + (٣)^٢ + (-١٥)^٢} = ٣\sqrt{٣٥}$$

∴ مساحة متوازى الضلاع = $٣\sqrt{٣٥}$ وحدة مساحة.

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥، -١)$ أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان.

تعلم

الضرب الثلاثى القياسى *Scalar triple product*

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ متجهات فإن المقدار $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى. الذى له كثير من التمثيلات فى مجال الاستاتيكا (لاحظ عدم وجود أقواس حيث لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولًا)

وبفرض $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (جـ_س ، جـ_ص ، جـ_ع)$

فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

$$= (أ_س\,\overrightarrow{س} + أ_ص\,\overrightarrow{ص} + أ_ع\,\overrightarrow{ع}) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

$$= (أ_س\,\overrightarrow{س} + أ_ص\,\overrightarrow{ص} + أ_ع\,\overrightarrow{ع}) \cdot [(ب_ص\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_ص)\,\overrightarrow{س} - (ب_س\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_س)\,\overrightarrow{ص}$$
$$+ (ب_س\, جـ_ص - ب_ص\, جـ_س)\,\overrightarrow{ع}]$$

$$أ_س(ب_ص\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_ص) - أ_ص(ب_س\, جـ_ع - ب_ع\, جـ_س) + أ_ع(ب_س\, جـ_ص - ب_ص\, جـ_س)$$

$$= \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثى القياسى

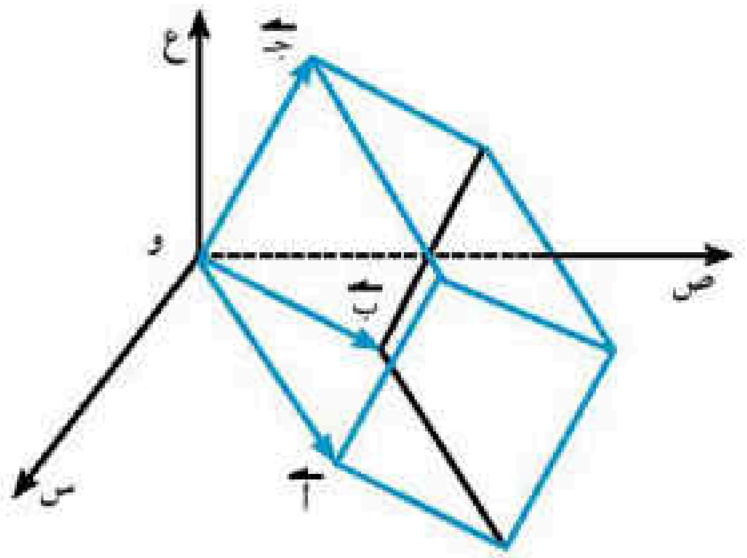
١- الضرب الثلاثي القياسي قيمته لا تتغير إذا كانت ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد.

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot (\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{\text{جـ}} \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ **لاحظ الترتيب الدورى** $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$

٢- إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ فى مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي ينعدم

أى إن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}})$ = صفر

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ثلاثة متجهات، تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازى سطوح، فإن حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى إن حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}|$

مثال

(١١) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، ١، ٣)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-١، ٣، ٢)، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١، ١، -٢)

الحل

حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}|$ (١)

$$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{أس} & \text{أص} & \text{أع} \\ \text{بس} & \text{بص} & \text{بع} \\ \text{جس} & \text{جص} & \text{جع} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢٨$$

أى أن حجم متوازى السطوح= |-٢٨| = ٢٨ وحدة حجم

حاول أن تحل

(١١) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية، يمثلها المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، -٤ ، ١)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، -٣) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣، ٢، ٢)

تمـــارين (٣-٣)

أكمل ما يأتي: إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة:

١) $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}}$ = ...

٢) $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}}$ = ...

٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، -١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، -٤) فإن مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ تساوي ....

٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريان وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٠ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان ....

٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريان وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان ....

٦) قياس الزاوية بين المتجهين ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ - $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، -٤$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$ يساوي ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٧) $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}}$ = ...

- أ) $\overrightarrow{\text{و}}$
- ب) ٠
- ج) ١
- د) $\overrightarrow{\text{ع}}$

٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهي وحدة متعامدين فإن ($\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٢$\overrightarrow{\text{ب}}$) $\cdot$ (٣$\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٥$\overrightarrow{\text{ب}}$) =

- أ) -٨
- ب) -٧
- ج) ٢٤
- د) ٠

٩) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهي وحدة فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ ....

- أ)]٠ ، ١[
- ب)]-١ ، ١[
- ج) [-١ ، ١]
- د) ح+

١٠) قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، -٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوي ....

- أ) ٥٧,٠٢°
- ب) ٣٥,٢٦°
- ج) ١٣٤,٣٧°
- د) ٠°

١١) إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيين فإن ك = ...

- أ) ٦
- ب) ٣
- ج) -٣
- د) ١

أجب عما يأتى:

١٢ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ١ ، -٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، -٤ ، ٣)

ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = -٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$

ج) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$

١٣ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية:

أ) (٥ ، ١ ، -٢) ، (١ ، ١ ، -١)

ب) (٧ ، ٢ ، -١٠) ، (٢ ، ٦ ، ٤)

ج) (٢ ، ١ ، ٤) ، (١ ، -٢ ، ٠)

١٤ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢ ، ٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٣ ، -٤)

ب) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = -$\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

ج) $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٦ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

١٥ اب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم. $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستواه. أوجد:

أ) $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{اجـ}}$

ب) $\overrightarrow{\text{اب}} \times \overrightarrow{\text{جـا}}$

ج) $\overrightarrow{\text{ب جـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ا ء}}$

د) $\overrightarrow{\text{ب ء}} \times \overrightarrow{\text{ا جـ}}$

هـ) $\overrightarrow{\text{اب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

و) $\overrightarrow{\text{اب}} \times \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

١٦ أوجد متجه وحدة عموديًّا على المستوى الذى يحوى المتجهين.

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = -$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$

١٧ احسب مساحة المثلث ء هـ و فى كل مما يأتى:

أ) ء(٥ ، ١ ، -٢) ، هـ(٤ ، -٤ ، ٣) ، و (٢ ، ٤ ، ٠)

ب) ء (٤ ، ٠ ، ٢) ، هـ(٢ ، ١ ، ٥) ، و (-١ ، ٠ ، -١)

(١٨) احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى:

(أ) ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن(٥ ، ٤)

(ب) ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن(٢ ، ٥ ، ٣)

(١٩) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فيما يلى:

$\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ١ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ١ ، ٤) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (٥ ، ١ ، -٢)

(٢٠) فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك:

(أ) $\overleftarrow{أ}$ = (٠ ، ٢، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٠ ، -٤)

(ب) $\overleftarrow{هـ}$ = ١٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{و}$ = -٣ $\overleftarrow{ص}$ + ٨ $\overleftarrow{ع}$

(جـ) $\overleftarrow{أ}$ = -٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ - ٢ $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = ٨ $\overleftarrow{س}$ - ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٨ $\overleftarrow{ع}$

الوحدة الرابعة

الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

Straight Lines and planes in space

مقدمة الوحدة

درست فى الوحدة السابقة تحديد نقطة فى الفراغ، كذلك متجهات الموضع وكيفية إيجاد معيارها وهذه تعتبر من أساسيات هذه الوحدة حيث إنها تعتبر استكمالًا لما درس فى الوحدة السابقة ومكملًا لما درس فى العام السابق.

وفى هذه الوحدة سوف يدرس الطالب معادلة المستقيم فى الفراغ كذلك معادلة المستوى بصورها المختلفة، وقد تنوعت الأمثلة وطرق الحل تحقيقًا للأهداف المعرفية والمهارية التى تساعد الطالب على دراسة المعارف والمفاهيم الأخرى المرتبطة بهندسة الفراغ فى المراحل التعليمية التالية.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الاحداثية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ.
- يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- يعين المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

متجه اتجاه	Direction vector
زوايا اتجاه	Direction angles
جيوب تمام الاتجاه	Direction cosines
نسب الاتجاه	Direction ratios
معادلة متجهة	Vector equation
معادلات بارامترية	Parametric equations
معادلة احداثية	Cartesian equation
معادلة عامة	General equation
يتناسب	Proportional
مستقيمان متوازيان	Parallel straight Lines
مستقيمان متعامدان	Perpendicular straight Lines
مستقيمان متقاطعان	Intersecting straight Lines
مستقيمان متخالفان	Skew straight Lines
بعد عمودى	Perpendicular distance
مستوى	plane
صورة قياسية	Standard form
مستويان متوازيان	Parallel planes
مستويان متعامدان	Perpendicular planes
مستويان متقاطعان	Interecting planes
زاوية	Angle

الأدوات والوسائل

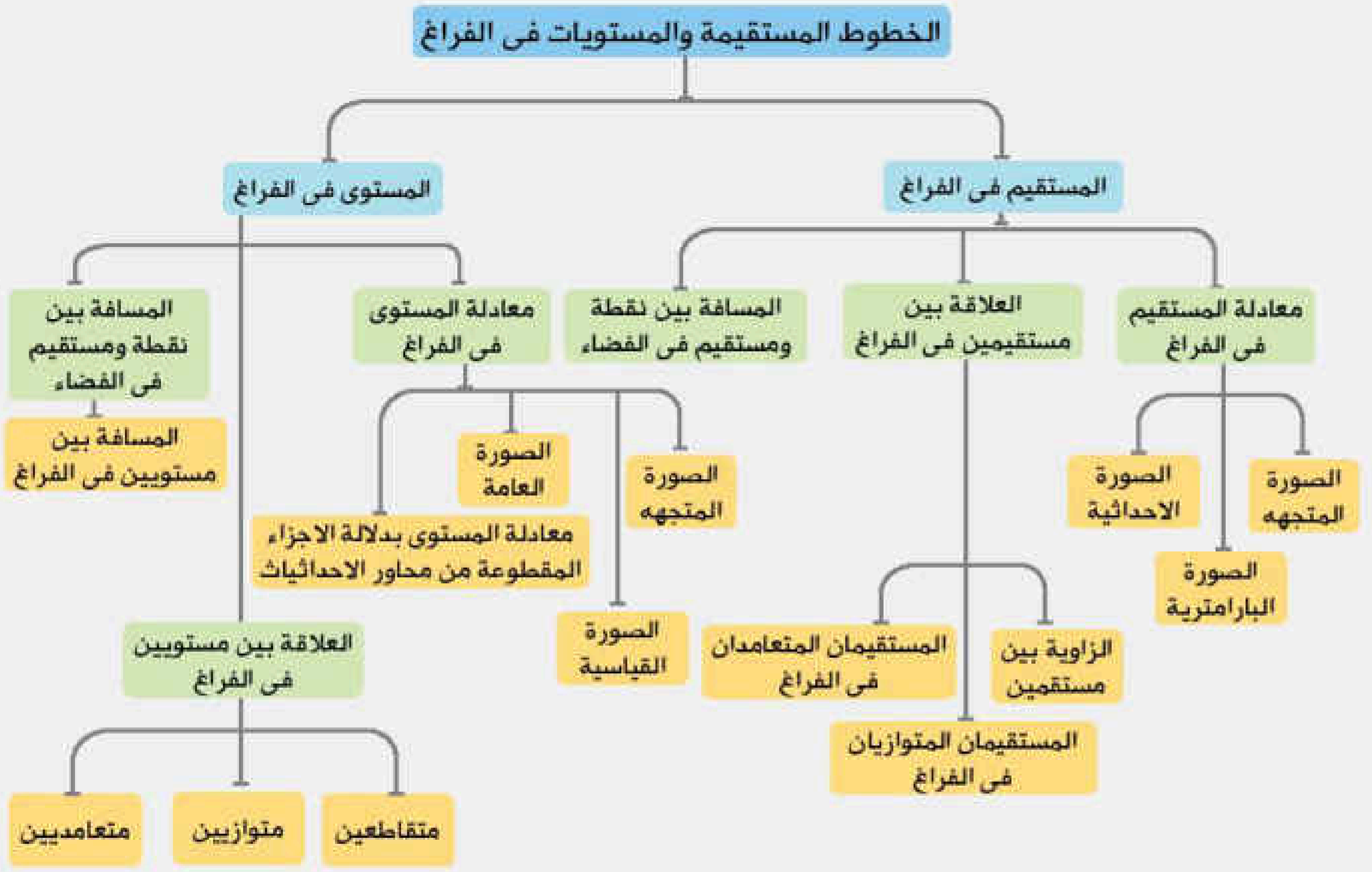
- آلة حاسبة بيانية.
- برامج رسومية ثلاثية الأبعاد.

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): معادلة المستقيم فى الفراغ.

الدرس (٢ - ٢): معادلة المستوى فى الفراغ.

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الرابعة

٤ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ

Equation of a straight Line in space

سوف تتعلم
- متجه اتجاه الخط المستقيم.
- الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.
- الزاوية بين مستقيمين.
- المسافة بين نقطة ومستقيم.
- المستقيمات المتوازية.
- المستقيمات المتعامدة.

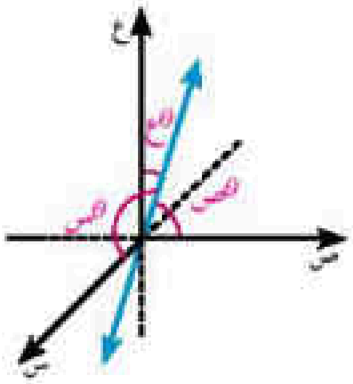
مصطلحات أساسية
- متجه اتجاه *Direction vector*
- المعادلة البارامترية *Parametric equations*
- المعادلة الاحداثية *Cartesian equation*
- زوايا الاتجاه *Direction angles*
- نسب الاتجاه *Direction ratios*

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

تعلمت فى السنوات السابقة الخط المستقيم فى المستوى وكيفية إيجاد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم فى المستوى (الصورة المتجهة- الصورة البارامترية- الصورة العامة) وفى هذا الدرس نتعلم المستقيم فى الفراغ وكيفية إيجاد معادلة المستقيم فى الفراغ فى صورها المختلفة لما فى ذلك من أهمية كبيرة فى مجالات الهندسة والتصميم المعمارى وتطبيقات علوم الفضاء.

تعلم

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ *Direction vector of a straight Line in space*



إذا كانت $\theta_{س}$، $\theta_{ص}$، $\theta_{ع}$ هى زوايا اتجاه مستقيم فى الفراغ **فإن** جتا $\theta_{س}$، جتا $\theta_{ص}$، جتا $\theta_{ع}$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم وعادة يرمز لها بالرمز ل ، م ، ن.

ل = جتا $\theta_{س}$، م = جتا $\theta_{ص}$، ن = جتا $\theta_{ع}$

ويكون $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

ويكون المتجه $\overleftarrow{ى} = ل\,\overleftarrow{س} + م\,\overleftarrow{ص} + ن\,\overleftarrow{ع}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه المستقيم.

ويكون أى متجه موازيًا لمتجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$

أى أن $\overleftarrow{هـ} = ك\,(ل\,\overleftarrow{س} + م\,\overleftarrow{ص} + ن\,\overleftarrow{ع}) = (أ ، ب ، جـ)$

حيث أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، ك $\in ح^*$

أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم

فمثلًا: إذا كان $(\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ هى جيوب تمام الاتجاه المستقيم.

فإن المتجه $\overleftarrow{هـ} = ك\,(\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ يمثل متجه اتجاه المستقيم حيث ك ≠ صفر

بوضع ك = ٣ ⟵ $\overleftarrow{هـ}$ = (٢، ١، ٢)

وبوضع ك = -٦ ⟵ $\overleftarrow{هـ}$ = (-٤، -٢، -٤)

أى أن الخط المستقيم له عدد لا نهائى من متجهات الاتجاه المتوازية، وكل منها يوازى هذا المستقيم.

مثال

(١) أوجد متجه الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين أ (-٢ ، ٣، ١) ، ب (٠ ، ٤ ، -٢)

الحل

متجه اتجاه المستقيم $= \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} =$ (٠ ، ٤ ، -٢) - (-٢ ، ٣ ، ١)

∴ $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، ١ ، -٣)

حاول أن تحل

(١) أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

(أ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (-١ ، ٢ ، -٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطتين جـ (٠ ، -٢ ، ٣) ، ى (١ ، ١ ، -١)

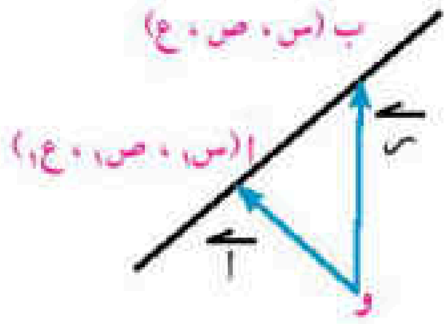
تفكير ناقد:

١- ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overrightarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، صفر)

٢- أوجد متجه اتجاه لكل من محاور الإحداثيات.

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ *Vector form of the equation of a straight Line in space*



إذا كان ل مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه $\overrightarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، جـ) ويمر بالنقطة أ متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) فإذا كانت النقطة ب أى نقطة على المستقيم متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) فإن

من الشكل يكون: $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{أب}$

ولكن $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{هـ}$ $(\overrightarrow{أب} = ك\,\overrightarrow{هـ})$

∴ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{هـ}$ ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم.

مثال

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ٠) والمتجه (-٢، ٤ ، ٣) متجه اتجاه له.

الحل

(٣ ، -١ ، ٠) تمثل نقطة على المستقيم ∴ $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، -١ ، ٠)

(-٢ ، ٤ ، ٣) يمثل متجه اتجاه المستقيم ∴ $\overrightarrow{هـ}$ = (-٢ ، ٤ ، ٣)

معادلة المستقيم هى $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{هـ}$

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، -١ ، ٠) + ك (-٢ ، ٤ ، ٣) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.

ملحوظة: ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة، ويسمى فى هذه الحالة بارامتر. وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

فمثلًا عند ك = ١ فإن $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣ ، ٣) تمثل متجه موضع نقطة على المستقيم .

وعند ك = ٢ فإن $\overleftarrow{ر}$ = (-١ ، ٧ ، ٦) تمثل متجه موضع نقطة أخرى على المستقيم.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه (١ ، -٢ ، ٢) متجه اتجاه له. ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

تعلم

المعادلات البارامترية للمستقيم فى الفراغ

Parametric equations of a straight Line in space

من المعادلة المتجهة للمستقيم $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{هـ}$

وبالتعويض عن $\overleftarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع)، $\overleftarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$)، $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، جـ)

فإن (س ، ص ، ع) = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) + ك (أ ، ب، جـ)

∴ (س = س$_١$ + ك أ ، ص = ص$_١$ + ك ب ، ع = ع$_١$ + ك جـ) ⟵ المعادلات البارامترية للخط المستقيم

مثال

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (٤ ، -٢ ، ٥) متجه اتجاه له.

الحل

$\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

∴ (س ، ص ، ع) = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥)

∴ س = ٢ + ٤ك ، ص = -١ -٢ك ، ع = ٣ + ٥ ك

حاول أن تحل

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل، والمتجه (-٢ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه له.

تعلم

المعادلة الاحداثية للخط المستقيم

cartesian equation of a straight Line in space

من المعادلات البارامترية للخط المستقيم

س = س$_١$ + ك أ، ص = ص$_١$ + ك ب، ع = ع$_١$ + ك جـ ∴ $\frac{س - س_١}{أ}$ = ك ، $\frac{ص - ص_١}{ب}$ = ك ، $\frac{ع - ع_١}{جـ}$ = ك

∴ $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$ ⟵ الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم

حيث كل من أ ، ب ، جـ لا يساوى الصفر

ملحوظة:

١- فى حالة ا = صفر مثلًا فإن الصورة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة س = س١، $\frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٢- تعلمت فى السنوات السابقة أن معادلة المستقيم فى المستوى هي ا س + ب ص + جـ = ٠ ويظن البعض أن معادلة المستقيم فى الفراغ ستكون ا س + ب ص + جـ ع + ى = ٠ وهذا خطأ شائع حيث إن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى فى الفراغ كما سيتضح ذلك فى الدروس الآتية.

٣- حيث إن نسب الاتجاه ا ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل، م، ن فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة المستقيم على الصورة

$$\frac{س - س_١}{ل} = \frac{ص - ص_١}{م} = \frac{ع - ع_١}{ن}$$

مثال

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١ ، ٥) ، (-٣ ، ١ ، ٤).

الحل

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = (-٣ ، ١ ، ٤) - (٢ ، -١ ، ٥) = (-٥ ، ٢ ، -١)

∴ **الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم** $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٥) + ك (-٥ ، ٢ ، -١)

المعادلات البارامترية س = ٢ - ٥ك ، ص = -١ + ٢ك ، ع = ٥ - ك

الصورة الاحداثية $\frac{س - ٢}{-٥} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{ع - ٥}{-١}$

حاول أن تحل

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٠) ، (-١ ، ٢ ، ٤)

مثال

٥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{٣س + ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{٥ - ع}{٣}$

الحل

نفرض $\frac{٣س + ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{٥ - ع}{٣}$ = ك

∴ $\frac{٣س + ١}{٢}$ = ك ومنها س = $\frac{-١}{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$ك

$\frac{ص - ١}{٢}$ = ك ومنها ص = ١ + ٢ك

$\frac{٥ - ع}{٣}$ = ك ومنها ع = ٥ - ٣ك

} المعادلات البارامترية للخط المستقيم

ومن المعادلات البارامترية يمكن كتابة المعادلة

(س ، ص ، ع) = (-$\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٥) + ك ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣)

أى $\overrightarrow{ر}$ = (-$\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٥) + ك ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣) الصورة المتجهة

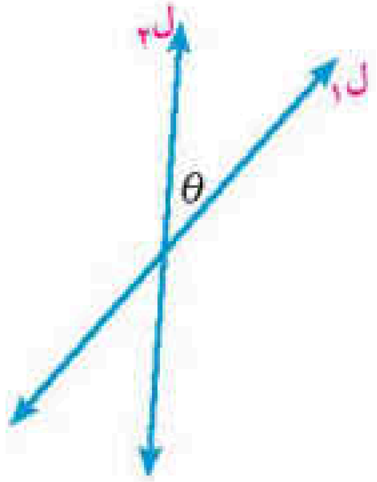
لاحظ أن: نسب اتجاه المستقيم هى ($\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، -٣) أو (٢ ، ٦ ، -٩)

حاول أن تحل

٥) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٢} = \frac{٤ - \text{ع}}{٤}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

تعلم

الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ *The angle netween two straight Lines in space*



إذا كان $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ مستقيمين فى الفراغ متجهى اتجاهيهما $\overleftarrow{\text{ه}_١} = (\text{ا}_١ ، \text{ب}_١ ، \text{جـ}_١)$ ، $\overleftarrow{\text{ه}_٢} = (\text{ا}_٢ ، \text{ب}_٢ ، \text{جـ}_٢)$ فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين $\text{ل}_١$، $\text{ل}_٢$ تعطى بالعلاقة

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ه}_١} \bullet \overleftarrow{\text{ه}_٢}|}{||\overleftarrow{\text{ه}_١}||\;||\overleftarrow{\text{ه}_٢}||}$$

وإذا كان $(\text{ل}_١ ، \text{م}_١ ، \text{ن}_١)$، $(\text{ل}_٢ ، \text{م}_٢ ، \text{ن}_٢)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن:

$$\text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_١\,\text{ل}_٢ + \text{م}_١\,\text{م}_٢ + \text{ن}_١\,\text{ن}_٢|$$

مثال

٦) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftarrow{\text{ر}_١} = (٢ ، -١ ، ٣) + \text{ك}_١\,(-٢ ، ٠ ، ٢)$، $\text{س} = ١$ ، $\frac{\text{ص} - ٤}{٣} = \frac{\text{ع} + ٥}{-٣}$

الحل

من معادلة المستقيم الأول $\overleftarrow{\text{ه}_١} = (-٢ ، ٠ ، ٢)$

من المعادلات البارامترية للمستقيم الثانى $\overleftarrow{\text{ه}_٢} = (٠ ، ٣ ، -٣)$

$$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ه}_١} \bullet \overleftarrow{\text{ه}_٢}|}{||\overleftarrow{\text{ه}_١}||\;||\overleftarrow{\text{ه}_٢}||} = \frac{|(-٢ ، ٠ ، ٢) \bullet (٠ ، ٣ ، -٣)|}{\sqrt{(-٢)^٢ + ٠^٢ + ٢^٢}\,\sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + (-٣)^٢}}$$

$$= \frac{٦}{\sqrt{٨}\,\sqrt{١٨}} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore \theta = ٦٠^\circ$$

حاول أن تحل

٦) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

$\text{ل}_١ : \text{س} = ٢ - ٥\text{ك}، \text{ص} = ١ - \text{ك}، \text{ع} = ٣ + ٤\text{ك}$ ، $\text{ل}_٢ : \frac{\text{س} + ١}{٣} = \frac{٢ - \text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢}$

مثال

٧) أوجد قياس الزاوية بين مستقيمين الذين جيوب تمام اتجاهما هى

$$\left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)، \left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$$

الحل

$(\text{ل}_١ ، \text{م}_١ ، \text{ن}_١) = \left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ ، $(\text{ل}_٢ ، \text{م}_٢ ، \text{ن}_٢) = \left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_١\text{ل}_٢ + \text{م}_١\text{م}_٢ + \text{ن}_١\text{ن}_٢|$

$= \left|\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} + \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\right|$

$= \left|\frac{-١٥}{١٣٠} + \frac{-٤٨}{١٣٠} + \frac{١}{٢}\right| = \frac{١}{٦٥}$

$\therefore \theta = \text{جتا}^{-١}\left(\frac{١}{٦٥}\right) = ٨٩^\circ\ ٧'\ ٦''$

حاول أن تحل

⑦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما هى $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$، $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠\right)$

تعلم

المستقيمان المتوازيان فى الفراغ

Parallel Lines in space

إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_١} = (\text{أ}_١ ، \text{ب}_١ ، \text{جـ}_١)$، $\overrightarrow{\text{هـ}_٢} = (\text{أ}_٢ ، \text{ب}_٢ ، \text{جـ}_٢)$ هما متجها اتجاه المستقيمين $\text{ل}_١$، $\text{ل}_٢$ فإن $\text{ل}_١ // \text{ل}_٢$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_١} // \overrightarrow{\text{هـ}_٢}$ وهذا الشرط يمكن تحققه بعدة صور مختلفة

١- $\overrightarrow{\text{هـ}_١} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{هـ}_٢}$

٢- $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{\text{جـ}_١}{\text{جـ}_٢}$

٣- $\overrightarrow{\text{هـ}_١} \times \overrightarrow{\text{هـ}_٢} = \overrightarrow{\text{و}}$

ملحوظة

١- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٢- إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_١}$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{هـ}_٢}$ فإن $\text{ل}_١$، $\text{ل}_٢$ إما متقاطعان أو متخالفان.

مثال

⑧ أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{\text{ر}_١} = \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}_١(\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}})$

$\overrightarrow{\text{ر}_٢} = (\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}) + \text{ك}_٢(-٢\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}})$

متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

$\overrightarrow{\text{هـ}_١} = (١ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}_٢} = (-٢ ، -٢ ، ٠)$

$\because \frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{١}{-٢} = -\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{٢}{-٢} = -١$ $\therefore \frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} \neq \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢}$

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين لإثبات أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة نبحث عن قيمة لـ $\text{ك}_١$، وقيمة لـ $\text{ك}_٢$ تجعلان $\overrightarrow{\text{ر}_١} = \overrightarrow{\text{ر}_٢}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}_١(\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}) = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}} + \text{ك}_٢(-٢\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}})$ بمساواة المعاملات

∴ ك$_١$ = ١ - ٢ك$_٢$ ومنها ك$_١$ + ٢ك$_٢$ = ١ (١)

٢ك$_١$ = -٢ك$_٢$ ومنها ك$_١$ + ك$_٢$ = ٠ (٢)

-ك$_١$ = ١ ومنها ك$_١$ = -١ (٣)

بالتعويض من (٣) فى (١) ك$_٢$ = ١

وهذه القيم تحقق المعادلة (٢)

∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة، ويكون متجه موضع نقطة تقاطعهما هو

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ص}$ - ١ ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$) = - $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ **أى** (-١ ، -١ ، ١)

حاول أن تحل

(٨) أثبت أن المستقيمين $\overleftarrow{ر_١}$ = (٢ ، -٣ ، ٥) + ك$_١$ (٠ ، -٥ ، ٥)

$\overleftarrow{ر_٢}$ = (-٢ ، ٣ ، ١) + ك$_٢$ (٥ ، -١ ، -١)

متعامدان ومتقاطعان فى نقطة، وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

تعلم

المستقيمان المتعامدان فى الفراغ *Perpendicular Lines in space*

إذا كان $\overleftarrow{هـ_١}$ = (أ$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١$) ، $\overleftarrow{هـ_٢}$ = (أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، جـ$_٢$) هما متجها اتجاه المستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$ فإن

ل$_١$ ⊥ ل$_٢$ إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{هـ_١}$ • $\overleftarrow{هـ_٢}$ = ٠

مثال

(٩) أثبت أن المستقيمين $\overleftarrow{ر_١}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك$_١$ (٢ ، -١ ، ١) ، $\overleftarrow{ر_٢}$ = (١ ، ١ ، ١) + ك$_٢$ (-٢ ، ٧ ، ١١) متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

الحل

$\overleftarrow{هـ_١}$ = (٢ ، -١ ، ١) ⟵ متجه اتجاه المستقيم الأول

$\overleftarrow{هـ_٢}$ = (-٢ ، ٧ ، ١١) ⟵ متجه اتجاه المستقيم الثانى

∴ $\overleftarrow{هـ_١}$ • $\overleftarrow{هـ_٢}$ = (٢ ، -١ ، ١) • (-٢ ، ٧ ، ١١)

= ٢ × (-٢) + (-١) × ٧ + ١ × ١١

= -٤ - ٧ + ١١

= صفر ∴ المستقيمان متعامدان

لإثبات أن المستقيمين متخالفان نثبت أنه لا توجد أى قيم لـ ك$_١$ ، ك$_٢$ تجعل $\overleftarrow{ر_١}$ = $\overleftarrow{ر_٢}$

أى (١ ، ٢ ، ٤) + ك$_١$ (٢ ، -١ ، ١) = (١ ، ١ ، ١) + ك$_٢$ (-٢ ، ٧ ، ١١) بمساواة المعاملات

∴ ١ + ٢ك$_١$ = ١ - ٢ك$_٢$ ومنها ك$_١$ + ك$_٢$ = ٠ (١)

٢ - ك$_١$ = ١ + ٧ك$_٢$ ومنها -ك$_١$ - ٧ك$_٢$ = -١ (٢)

٤ + ك$_١$ = ١ + ١١ك$_٢$ ومنها ك$_١$ - ١١ك$_٢$ = -٣ (٣)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ نحصل على ك١ = $\frac{-١}{٦}$ ، ك٢ = $\frac{١}{٦}$ وهذه القيم لا تحقق المعادلة الثالثة

∴ المستقيمان متخالفان

حاول أن تحل

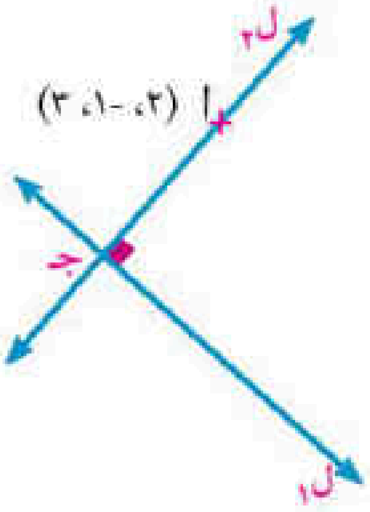
(٩) أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٠ ، ٤ ، -١) + ك٢ (١ ، -١ ، ٢) متخالفان.

مثال

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، -١ ، ٣) و يقطع المستقيم $\overrightarrow{ر_١}$ = (١ ، -١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، -١) على التعامد.

الحل

نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة جـ



∵ جـ ∈ المستقيم ل١ (المستقيم المعلوم)

∴ جـ يمكن كتابتها على الصورة

جـ (١ + ٢ك ، -١ + ٢ك ، ٢ - ك)

متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب) هو $\overrightarrow{هـ_٢}$ = $\overrightarrow{أجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ - $\overrightarrow{أ}$

∴ $\overrightarrow{هـ_٢}$ = (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك - ١)

∵ $\overrightarrow{هـ_١}$ = (٢ ، ٢ ، -١)

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\overrightarrow{هـ_١}$ • $\overrightarrow{هـ_٢}$ = ٠

∴ (٢ ، ٢ ، -١) • (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك - ١) = ٠

∴ ٤ك - ٢ + ٤ك + ك + ١ = ٠

∴ ٩ك = ١ ومنها ك = $\frac{١}{٩}$

∴ $\overrightarrow{هـ_٢}$ = ($\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{-١٠}{٩}$) = (-٧ ، ٢ ، -١٠)

∴ معادلة ل٢ هى $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك٢ (-٧ ، ٢ ، -١٠)

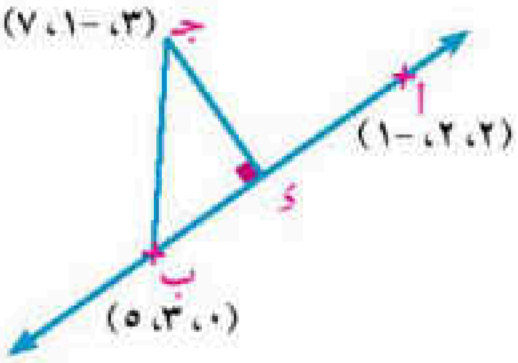
حاول أن تحل

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣) على التعامد

مثال (المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ)

(١١) أوجد البعد العمودى من النقطة (٣ ، -١ ، ٧) للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، -١)، (٠ ، ٣ ، ٥)

الحل



بفرض أ (٢ ، ٢ ، -١)، ب (٠ ، ٣ ، ٥)، جـ (٣ ، -١ ، ٧)

$\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -١ ، ٧) - (٠ ، ٣ ، ٥) = (٣ ، -٤ ، ٢)

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = $\overrightarrow{بأ}$ = $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، -١ ، -٦)

ب ء هى مقياس مسقط $\overrightarrow{بجـ}$ على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{|\overrightarrow{بجـ} \cdot \overrightarrow{بأ}|}{||\overrightarrow{بأ}||}$

∴ ب ء = $\frac{|(٣، -٤، ٢) \cdot (٢، -١، -٦)|}{\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٦)^٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٤١}}$

لكن $||\overrightarrow{بجـ}||$ = $\sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$

∴ البعد العمودى جـ ء = $\sqrt{(ب جـ)^٢ - (ب ء)^٢}$ = $\sqrt{٢٩ - \frac{٤}{٤١}}$ = $\sqrt{\frac{١١٨٥}{٤١}}$ ≃ ٥,٣ وحدة طول

حاول أن تحل

(١١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، -٤) على المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (١، -١، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، -٢)

تفكير ناقد: هل يمكنك اثبات الصيغة التالية التى تعين بعد النقطة ب عن المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{هـ}$

البعد العمودى = $\frac{||\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ}||}{||\overrightarrow{هـ}||}$

تمارين (٤ - ١)

أكمل:

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (-١ ، ٤ ، ٢) متجه اتجاه له هى ....

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين ٢س = ٣ص = -ع ، ٦س = -ص = -٤ع يساوى ....

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١، ١، ٢)، ($\sqrt{٣}$ -١، -$\sqrt{٣}$ -١، ٤) يساوى ....

(٤) إذا كانت $\theta_ع$ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، -١ ، ١) ونقطة الأصل والاتجاه الموجب لمحور ع فإن جتا$\theta_ع$ = ...

(٥) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، -٥ ، ٤)، (٥ ، -٣ ، ٣) هو ....

اجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه

(أ) -١ ، ٢ ، ٣ (ب) ١ ، ١ ، ١

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.

(أ) المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، ١ ، -١) متجه اتجاه له.

(ب) المار بالنقطة (٣ ، -١ ، ٥) ويوازى المتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث $\overrightarrow{أب}$ = (٤ ، -٢ ، ٢)

(جـ) المار بالنقطتين (٣ ، -٢ ، ٠)، (٠ ، ٤ ، ١)

(د) المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

(٨) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم س - ٣ = $\frac{ص+٢}{٤}$ = $\frac{٢ - ع}{٣}$

(٩) إذا كان $\overrightarrow{وأ}$ = $\overrightarrow{س}$ - ٢$\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وب}$ = -$\overrightarrow{س}$ -٣$\overrightarrow{ع}$ ،
$\overrightarrow{وجـ}$ = ٣$\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ - ٢$\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وء}$ = ٨$\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + ٤$\overrightarrow{ع}$.

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات

(أ) المار بالنقطتين أ، ب

(ب) المار بالنقطة ء موازيًا $\overleftrightarrow{بجـ}$

(جـ) المار بالنقطة جـ قاطعًا $\overleftrightarrow{أب}$ على التعامد

(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

(أ) $ل_١$: يمر بالنقتطين (-٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، -٢)
$ل_٢$: يمر بالنقطتين (١ ، -٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(ب) $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + $ك_١$(-١ ، ٤ ، ٢)
$ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢ ، -١) + $ك_٢$(١ ، ١ ، ٣)

(جـ) $ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ ع
$ل_٢$: $\frac{س - ١}{٣}$ = $\frac{ص + ٢}{-٢}$ = $\frac{ع}{-٥}$

(١١) اذكر الشرط (أو الشروط) اللازم لكى يكون المستقيمان
$ل_١$: س = $س_١$ + $أ_١ك_١$ ، ص = $ص_١$ + $ب_١ك_١$ ، ع= $ع_١$ + $جـ_١ك_١$
$ل_٢$: س = $س_٢$ + $أ_٢ك_٢$ ، ص = $ص_٢$ + $ب_٢ك_٢$ ، ع = $ع_٢$ + $جـ_٢ك_٢$

(أ) متوازيان　(ب) متعامدان　(جـ) متقاطعان فى نقطة

(١٢) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١ ، -١ ، ٠) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (-٣ ، ٢ ، ١)، جـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (-١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

(١٣) أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين $ل_١$: $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، -١، ن) + $ك_١$ (٤ ، ١، ٣)
$ل_٢$: س = $\frac{ص - ٤}{-١}$ = $\frac{ع + ١}{٢}$ متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما

(١٤) **اكتشف الخطأ:**

(أ) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

(ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) هى
($س_٢$ - $س_١$ ، $ص_٢$ - $ص_١$ ، $ع_٢$ - $ع_١$)

(جـ) إذا كان ($أ_١$ ، $ب_١$، $جـ_١$) ، ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $جـ_٢$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين $ل_١$، $ل_٢$ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة جتاθ = |$أ_١أ_٢$ + $ب_١ب_٢$+ $جـ_١جـ_٢$|

الوحدة الرابعة

٤ - ٢

معادلة المستوى فى الفراغ

The equation of a plane in space

فكر و ناقش

١- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين متعامدين فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

٢- متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)، (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) هو ....

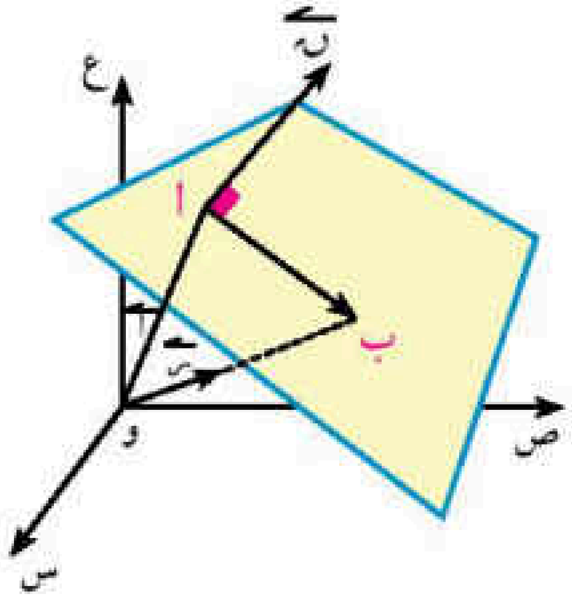
٣- الإحداثى ع لجميع النقط التى تقع فى المستوى الإحداثى س ص يساوى ....

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Vector form of the equation of a plane in space

إذا كانت النقطة أ (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) تقع على المستوى متجه موضعها $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، وكان المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى وكانت ب (س، ص، ع) أى نقطة على المستوى متجه موضعها $\overrightarrow{\text{ر}}$ فإن:



$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}}$ = صفر

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = 0$ $\qquad (\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ر}})$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى.

أى أن: لإيجاد المعادلة المتجهة للمستوى يجب معرفة نقطة على المستوى ومتجه الاتجاه العمودى على المستوى.

مثال

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٠ ، ١، ١) والمتجه $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ عمودى على المستوى.

سوف تتعلم

- المعادلة المتجهه للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- الزاوية بين مستويين.
- شرط توازى مستويين.
- شرط تعامد مستويين.
- معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- المسافة بين نقطة ومستوى.
- المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

- مستوى *plane*
- صورة قياسية *Standard form*
- مستويان متوازيان *Parallel planes*
- مستويان متعامدان *Perpendicular planes*
- مستويان متقاطعان *Interecting planes*
- زاوية *Angle*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

الحل

المعادلة المتجه $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$ حيث $\overleftarrow{أ} = (٠ ، ١ ، ١)$

∴ $(١ ، ١ ، ١) \cdot \overleftarrow{ر} = (١ ، ١ ، ١) \cdot (٠ ، ١ ، ١)$

$(١ ، ١ ، ١) \cdot \overleftarrow{ر} = ٢$

حاول أن تحل

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -٣ ، ١) والمتجه $\overleftarrow{ن} = (١ ، -٢ ، ٣)$ عمودى على المستوى.

تعلم

الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Standard form and general form of the equation of a plane in space

من الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$\overleftarrow{ن} \cdot (\overleftarrow{ر} - \overleftarrow{أ}) =$ صفر

حيث $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$، $\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$، $\overleftarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

∴ $(أ ، ب ، جـ) \cdot (س - س_١ ، ص - ص_١ ، ع - ع_١) =$ صفر

∴ $أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$ ⟵ الصورة القياسية لمعادلة المستوى

وبفك الأقواس

∴ $أس + ب ص + جـ ع + (-أس_١ - ب ص_١ - جـ ع_١) = ٠$

وبفرض $-أس_١ - ب ص_١ - جـ ع_١ = د$ فإن

$أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠$ ⟵ الصورة العامة لمعادلة المستوى

مثال

(٢) أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، -٥ ، ٢) والمتجه $\overleftarrow{ن} = (٢ ، ١ ، ١)$ عمودى على المستوى.

الحل

الصورة القياسية $أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$

∴ $٢(س - ٣) + (ص + ٥) + (ع - ٢) = ٠$ ⟵ الصورة القياسية

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة

∴ $٢س + ص + ع - ٣ = ٠$ ⟵ الصورة العامة

حاول أن تحل

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (-٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه $\overleftarrow{ن} = (١ ، -١ ، ٣)$ عمودى على المستوى.

مثال (معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة)

٣ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (٣ ، -١، ٠) ، (٢، ١ ، ٤) ، (٠ ، ٣ ، ٣).

الحل

أولًا يجب التأكد من أن النقط ليست على استقامة واحدة

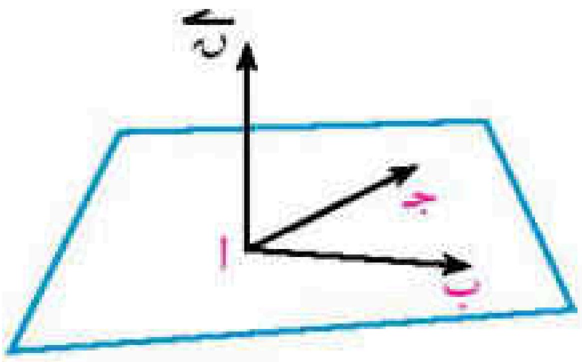
بفرض أ (٣ ، -١ ، ٠)، ب (٢ ، ١ ، ٤)، جـ (٠ ، ٣ ، ٣)

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-١، ٢، ٤)$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-٣، ٤، ٣)$

$\because \frac{-١}{-٣} \neq \frac{١}{٢}$ $\therefore$ $\overrightarrow{\text{أب}}$ لا يوازي $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ $\therefore$ النقط ليست على استقامة واحدة

لإيجاد معادلة المستوى نحتاج متجه اتجاه العمودى على المستوى. وذلك بإيجاد الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$.

$$\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٢ & ٤ \\ -٣ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠ \overrightarrow{\text{س}} - ٩ \overrightarrow{\text{ص}} + ٢ \overrightarrow{\text{ع}}$$



$\therefore$ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$$

$\therefore$ $(-١٠ ، -٩، ٢) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (-١٠ ، -٩ ، ٢) \cdot (٣، -١، ٠)$

$\therefore$ $(-١٠ ، -٩، ٢) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = -٢١$

أضف إلى معلوماتك

معادلة المستوى المار بالثلاث نقط $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١)$، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$، $(\text{س}_٣ ، \text{ص}_٣ ، \text{ع}_٣)$ هى:

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_١ & \text{ص} - \text{ص}_١ & \text{ع} - \text{ع}_١ \\ \text{س}_٢ - \text{س}_١ & \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ & \text{ع}_٢ - \text{ع}_١ \\ \text{س}_٣ - \text{س}_١ & \text{ص}_٣ - \text{ص}_١ & \text{ع}_٣ - \text{ع}_١ \end{vmatrix} = ٠$$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى

$\text{أ} (\text{س} - \text{س}_١) + \text{ب} (\text{ص} - \text{ص}_١) + \text{جـ} (\text{ع} - \text{ع}_١) = ٠$

$\therefore$ $-١٠ (\text{س} - ٣) - ٩ (\text{ص} + ١) + ٢ \text{ع} = ٠$

الصورة العامة لمعادلة المستوى

$(-١٠ ، -٩، ٢) \cdot (\text{س} ، \text{ص}، \text{ع}) = -٢١$ $\therefore$ $-١٠\text{س} - ٩\text{ص} + ٢ \text{ع} + ٢١ = ٠$

حاول أن تحل

٣ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٠، ٠)، (٠ ، ٢، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣).

مثال (مستوى يحوى مستقيمين)

٤ أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{\text{ر}}_١ = (٣\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}) + \text{ك}_١ (\overrightarrow{\text{س}} + ٢ \overrightarrow{\text{ص}} + ٣ \overrightarrow{\text{ع}})$

$\overrightarrow{\text{ر}}_٢ = (٢\overrightarrow{\text{س}} + ٥\overrightarrow{\text{ص}}) + \text{ك}_٢ (\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}})$

متقاطعان، وأوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

الحل

إذا تقاطع المستقيمان فإن $\overrightarrow{ر}_1 = \overrightarrow{ر}_2$

∴ $(٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}) + ك_1(\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}) = (٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}) + ك_2(\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع})$

بمساواة المعاملات نجد أن

$٣ + ك_1 = ٢ + ك_2$ ومنها $ك_1 - ك_2 = -١$ (١)

$١ + ٢ك_1 = ٥ - ك_2$ ومنها $٢ك_1 + ك_2 = ٤$ (٢)

$-١ + ٣ك_1 = ك_2$ ومنها $٣ك_1 - ك_2 = ١$ (٣)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ $ك_1 = ١$ ، $ك_2 = ٢$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٣) نجد أنها تحققها

∴ المستقيمان متقاطعان.

متجه الاتجاه العمودى على المستوى هو $\overrightarrow{ن}$ حيث

$$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{هـ}_1 \times \overrightarrow{هـ}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$$

المعادلة المتجهة للمستوى $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

∴ $(٥ ، ٢ ، -٣) \cdot \overrightarrow{ر} = (٥ ، ٢ ، -٣) \cdot (٣ ، ١ ، -١)$

∴ $(٥ ، ٢ ، -٣) \cdot \overrightarrow{ر} = ٢٠$

الصورة العامة

$(٥ ، ٢ ، -٣) \cdot (س ، ص ، ع) = ٢٠$

∴ $٥س + ٢ص - ٣ع = ٢٠$

حاول أن تحل

٤ أثبت أن المستقيمين $ل_1$: ٢س = ٣ص = ٤ ع، $ل_2$: ٣س = ٢ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما .

مثال

٥ أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٤ مع المستوى ٣س + ص - ٢ع = ٥

الحل

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ع - ٣س

بالتعويض فى معادلة المستقيم

٢س = ١٤ + ٦ع - ٩س = ع - ٤

١١س - ٦ع = ١٤ (١) -٥ع + ٩س = ١٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على

س = -٣٨ ، ع = -٧٢

بالتعويض فى معادلة المستوى ∴ ص = -٢٥

∴ نقطة التقاطع هى (-٣٨ ، -٢٥ ، -٧٢)

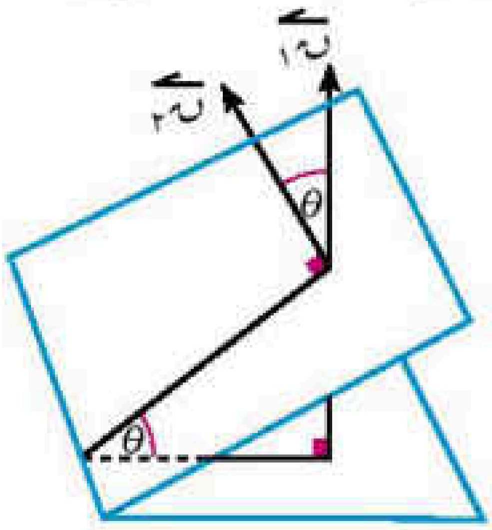
حاول أن تحل

(٥) أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢) مع المستوى (٣ ، ٢ ، ٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = -٢

تعلم

الزاوية بين مستويين *the angle between two planes*

قياس الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهى الاتجاه العمودين عليهما.
فإذا كان $\overrightarrow{\text{ن}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}_2$ هما المتجهين العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطى بالعلاقة



$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ن}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ن}}_2|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}_1\|\,\|\overrightarrow{\text{ن}}_2\|} \quad \text{حيث } 0 < \theta < 90^\circ$$

مثال

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين (٢ ، -١ ، ٤) • $\overrightarrow{\text{ر}}$ = ٥ ، ٣س - ص + ٢ع = ٤

الحل

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الأول $\overrightarrow{\text{ن}}_1$ = (٢ ، -١ ، ٤)

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الثانى $\overrightarrow{\text{ن}}_2$ = (٣ ، -١ ، ٢)

∴ قياس الزاوية بين المستويين هى θ حيث

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ن}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ن}}_2|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}_1\|\,\|\overrightarrow{\text{ن}}_2\|} = \frac{|(2, -1, 4)\bullet(3, -1, 2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}\,\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{15}{7\sqrt{6}}$$

$$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{15}{7\sqrt{6}}\right) = 28^\circ\ 58'$$

حاول أن تحل

(٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين س - ٣ص + ٢ع = ٠ ، ٢س + ص - ع = ٣

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان *Parallel planes and perpendicular planes*

إذا كان $\overrightarrow{\text{ن}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}_2$ هما متجهى الاتجاه العموديين على المستويين فإن

١- المستويين متوازيان إذا كان $\overrightarrow{\text{ن}}_1 \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ن}}_2$ أى إذا كان $\left(\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}\right)$

٢- المستويين متعامدان إذا كان $\overrightarrow{\text{ن}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ن}}_2 = 0$ أى إذا كان $(\text{أ}_1\text{أ}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2 + \text{جـ}_1\text{جـ}_2) = 0$

مثال

٧ إذا كان المستوى ٢س - ص +ك ع = ٥ يوازى المستوى س + ل ص + ٤ ع = ١ فما قيمة كل من ك ، ل.

الحل

∵ المستويان متوازيان ∴ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ك}{٤}$ ∴ ل = $\frac{-١}{٢}$ ، ك = ٨

حاول أن تحل

٧ إذا كان المستوى س - ٣ص + ع = ٤ عمودى على المستوى أ س + ٢ص + ٣ ع = ٢ فما قيمة أ

مثال (معادلة خط تقاطع مستويين)

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ٢ص - ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص - ٣ ع = ٥

الحل

بحذف س من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الأولى فى -٢ والجمع مع الثانية

∴ -٣ص + ع = ٣ ومنها ع = ٣ص + ٣ (١)

بحذف ص من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الثانية فى -٢ والجمع

∴ -٣س + ٤ ع = -٩ ومنها ع = $\frac{٣س - ٩}{٤}$

∴ $\frac{٣س - ٩}{٤} = \frac{٣ص + ٣}{١} = \frac{ع}{١}$ معادلة خط التقاطع

حل آخر:

س + ٢ص - ٢ ع = ١ (١)

٢س + ص - ٣ ع = ٥ (٢)

بحذف س

-٣ص + ع = ٣ (٣)

بفرض ع = ك

(٣) ص = $\frac{ك - ٣}{٣}$ ، (٢) س = $\frac{٩ + ٤ك}{٣}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى

س = ٣ + $\frac{٤}{٣}$ ك ، ص = -١ + $\frac{١}{٣}$ ك ، ع = ك

حل ثالث:

خط التقاطع عمودى على المتجهين $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ العمودين على المستويين.

∴ متجه اتجاه خط التقاطع $\overleftarrow{هـ}$ يمكن حسابه من الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$

$$\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{ن_١} \times \overleftarrow{ن_٢} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٤ \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص} - ٣ \overleftarrow{ع}$$

لإيجاد نقطة على خط التقاطع نضع س = ١ **(مثلًا)**

بالتعويض معادلة المستوى الأول ٢ص - ٢ع = صفر **(١)**

بالتعويض معادلة المستوى الثانى ص - ٣ع = ٣ **(٢)**

بحل المعادلتين (١)، (٢) نحصل على ع = $-\frac{٣}{٢}$ ، ص = $-\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) تقع على خط التقاطع.

معادلة خط التقاطع $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) + ك (-٤ ، -١ ، -٣)

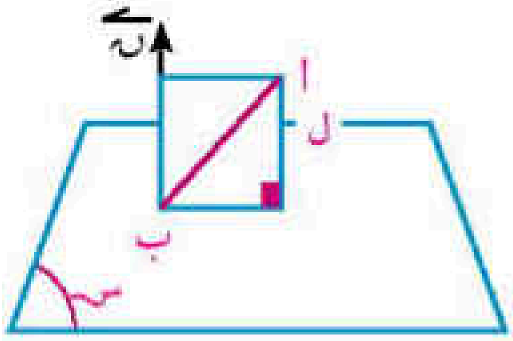
حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ٣س -ص + ٢ع = ٣ ، س - ٢ص + ٥ع = ٢

تعلم

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى *the length of the perpendicular from a point to a plane*

إذا كانت أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة خارج المستوى سـ وكانت ب نقطة على المستوى ، $\overleftarrow{ن}$ متجه الاتجاه العمودى على المستوى فإن بعد النقطة أ عن المستوى يساوى طول مسقط $\overleftarrow{بأ}$ على $\overleftarrow{ن}$



$$ل = \frac{|\overleftarrow{بأ} \cdot \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||}$$

مثال

٩ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، -١ ، ٣) على المستوى الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$. (٢ ، ٢ ، -١) = ٥

الحل

يجب إيجاد نقطة على المستوى ومتجه اتجاه العمودى على المستوى من معادلة المستوى $\overleftarrow{ر}$. (٢ ، ٢ ، -١) = ٥ نجد أن $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، ٢ ، -١)

ولإيجاد نقطة على المستوى نفرض أن المستوى يقطع محور ع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ع)

∴ (٠ ، ٠ ، ع) • (٢ ، ٢ ، -١) = ٥ **ومنها** ع = -٥

∴ النقطة ب (٠ ، ٠ ، -٥) تقع على المستوى

$\overleftarrow{بأ}$ = $\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، -١ ، ٨) حيث أ (١ ، -١ ، ٣)

طول العمود (ل) = $\frac{|\overleftarrow{بأ} \cdot \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||} = \frac{|(١ ، -١ ، ٨) \cdot (٢ ، ٢ ، -١)|}{\sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + (-١)^٢}} = \frac{٨}{٣}$ وحدة

حاول أن تحل

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢ ، ١ ، ٤) على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{ر}$. (١ ، -٣ ، ٢) = ٤

الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

علمت أن طول العمود المرسوم من نقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) على المستوى المار بالنقطة ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عمودى على المستوى يعطى بالعلاقة

$$ل = \frac{|\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ن}|}{\|\overrightarrow{ن}\|}$$

$$\therefore ل = \frac{|(س_1 - س_2 ، ص_1 - ص_2 ، ع_1 - ع_2) . (أ ، ب ، جـ)|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

$$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + (-أ س_2 - ب ص_2 - جـ ع_2)|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

∵ النقطة ب (س٢ ، ص٢ ، ع٢) تقع على المستوى أ س + ب ص + حـ ع + د = ٠

∴ - أ س٢ - ب ص٢ - جـ ع٢ = د

$$\therefore ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$ ⟵ الصورة الإحداثية لطول العمود

مثال

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٥، -٤) على المستوى الذى معادلته ٣س - ص + ٢ ع = ٦

الحل

$$ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

$$= \frac{|٣(١) - (٥) + ٢(-٤) - ٦|}{\sqrt{٣^2 + (-١)^2 + ٢^2}} = \frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$$ وحدة طول

حاول أن تحل

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-١ ، ٤ ، ٠) على المستوى الذى معادلته س - ٢ص - ع = ٤

مثال (المسافة بين مستويين متوازيين)

(١١) أثبت أن المستويين س + ٣ص - ٤ ع = ٣ ، ٢س + ٦ص - ٨ع = ٤ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

الحل

لإثبات أن المستويين متوازيان نثبت أن متجهى الاتجاه العموديين عليهما متوازيان.

$\overrightarrow{ن_1}$ = (١ ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{ن_2}$ = (٢ ، ٦ ، -٨)

$\because \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$ ∴ المستويان متوازيان

لإيجاد المسافة بينهما نوجد نقطة على إحداهما، ثم نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.
لإيجاد نقطة على المستوى الأول نفرض س = ٠ ، ص = ٠

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول $\therefore$ ع = $\frac{-٣}{٤}$

$\therefore$ النقطة (٠ ، ٠ ، $\frac{-٣}{٤}$) تقع على المستوى الأول

ويكون طول العمود المرسوم منها للمستوى الثانى هو ل حيث

$$\text{ل} = \frac{|٢(٠) + ٦(٠) - ٨(-\frac{٣}{٤}) - ٤|}{\sqrt{٢^٢ + ٦^٢ + (-٨)^٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢٦}} \text{ وحدة طول}$$

حاول أن تحل

(١١) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ ع = ١ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تعلم

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط ($س_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $ص_١$ ، ٠) (٠ ، ٠ ، $ع_١$) فإن معادلة المستوى تكون على الصورة

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$ ⟵ معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

استعن بمدرسك لإثبات الصورة السابقة لمعادلة المستوى.

مثال

(١٢) أوجد معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، -٣ ، ٥ على الترتيب.

الحل

معادلة المستوى هى $$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$

أى $$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٥} = ١$$

حاول أن تحل

(١٢) أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى ٢س + ٣ص - ع = ٦ من محاور الإحداثيات.

تفكير ناقد:

إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب.
احسب مساحة المثلث أ ب جـ

تمارين (٤ - ٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) أى من النقط تقع فى المستوى ٢ س + ٣ ص - ع = ٥

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (١ ، ٢ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٢ ، ١) (د) (٣ ، ٢ ، -١)

(٢) المستوى ٣س - ٢ص + ٤ع = ١٢ يقطع من محور س جزء طوله

(أ) ٣ (ب) -٤

(جـ) ٤ (د) ٦

(٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ ص - ٦ع = ٣٠ هى أ ، ب ، جـ فإن أ + ب + جـ =

(أ) صفر (ب) ٣٠

(جـ) ٣١ (د) ٤١

(٤) معادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى محورى الإحداثيات س ، ص هى

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣

(جـ) س = ١ (د) ص = ٢

(٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (-١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، -٢) هى

(أ) س + ص - ع = ٠ (ب) س = -١

(جـ) ص = ٣ (د) ع = -٢

(٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى

(أ) ٢س + ص + ٣ع = ١ (ب) ٢س + ص + ٣ع = ١٥

(جـ) س - ٢ص + ٥ع = ١٥ (د) س + ص + ع = ٤

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -١ ، ٤) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، -٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين:

(أ) هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى؟

(ب) هل المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، -٥ ، -٢) يوازى المستوى؟

(٨) أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

(أ) س = ٣ (ب) ص = -٢

(جـ) س + ٣ص = ٥ (د) ٢س - ص + ٣ع = ٤

(٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه $\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ عمودى عليه.

(١٠) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٠) والمتجه $\overrightarrow{ن} = ٤\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$ عمودي عليه.

(١١) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط أ (٢ ، -١ ، ٠) ب (-١ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٠ ، ٢)

(١٢) أثبت أن المستقيم $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ع} + ك\,(٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع})$ عمودى على المستوى $س + \frac{٣}{٢}ص + ٢ع = ٥$

(١٣) أثبت أن النقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) والمستقيم ل: $\overrightarrow{ر} = (٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}) + ك\,(\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع})$ يقعان فى المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{ر} \cdot (٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ع}) = ٣$

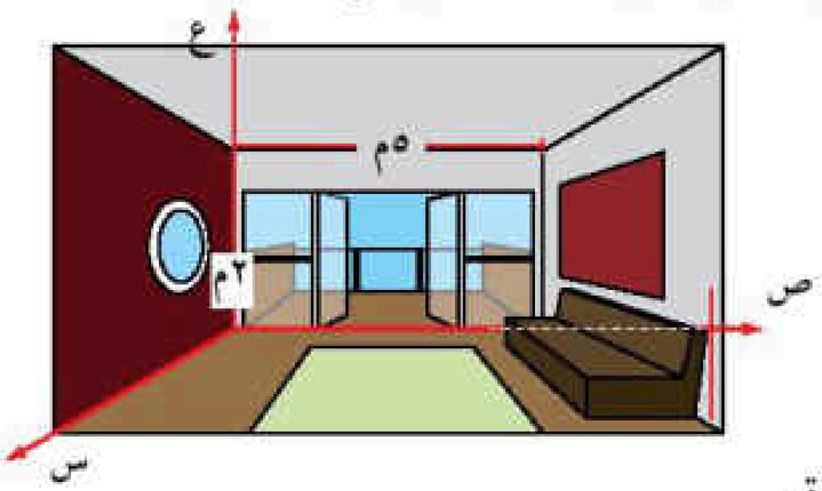
(١٤) أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) ويحقق كلًّا من الشروط الآتية:

- (أ) يوازى المستوى ٢س + ٣ص + ٥ع = ١
- (ب) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)
- (جـ) عمودي على كل من المستويين ٧س + ص + ٢ع = ٦ ، ٣س + ٥ص -٦ع = ٨

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ع} + ك\,(٢\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع})$ مع المستوى $\overrightarrow{ر} \cdot \overrightarrow{س} = ٤$

(١٦) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.

(١٧) **الربط بالبيئة:** فى الشكل المقابل. أوجد معادلة كل من



- (أ) مستوى أرضية الحجرة.
- (ب) مستوى سقف الحجرة.
- (جـ) مستويات الحوائط الجانبية.

(١٨) أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $ل_١: \overrightarrow{ر} = (٠ ، ٣ ، -٥) + ك_١\,(٦ ، -٢ ، -١)$ ويوازى المستقيم $ل_٢: \overrightarrow{ر} = (١ ، ٧ ، -٤) + ك_٢\,(١ ، -٣ ، ٣)$

(١٩) أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

- (أ) $ل_١$: ٢س - ص + ع = ٥ ، $ل_٢$: ٣س + ٢ص -٢ع = ١
- (ب) $ل_١$: $\overrightarrow{ر} \cdot (٢ ، ١ ، -١) = ٤$ ، $ل_٢$: $\overrightarrow{ر} \cdot (٣ ، -٢ ، ٠) = ٧$
- (جـ) $ل_١$: ص = ٤ ، $ل_٢$: س - ٣ص + ٥ع = ١

أسئلة متعددة المطالب

٢٠ إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ى فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى
-ص + ع ، ٢س - ص +٣ع ، - س -٢ص + ٢ع ، ٧س - ٤ص + ٢ع على الترتيب

أ) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب جـ

ب) بين طول العمود المرسوم من ى على مستوى أ ب جـ يساوى $2\sqrt{6}$

جـ) بين أن المستويين أ ب جـ ، ى ب جـ متعامدان.

د) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، و ى ب

٢١ إذا كان المستوى س يحوى النقط أ (١ ، ٤ ، ٢) ب (١ ، ٠ ، ٥)، جـ (٠ ، ٨ ، -١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ى (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه ن = س + ٢ ص + ٢ ع عمودى عليه أوجد:

أ) المعادلة الإحداثية للمستوى س

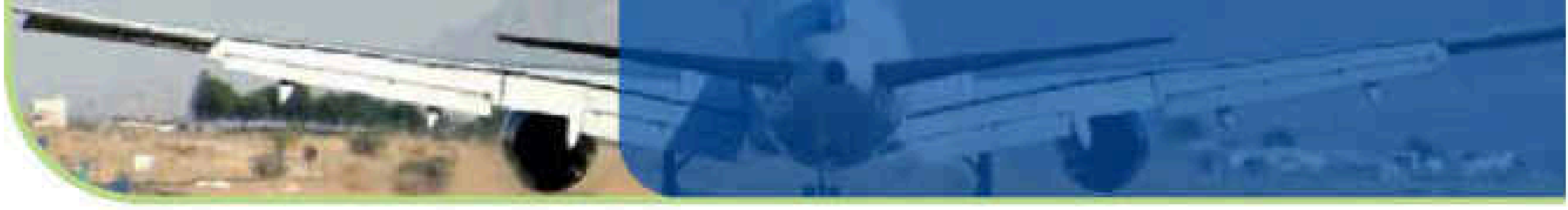
ب) المعادلة الإحداثية للمستوى ص

جـ) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

د) أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

هـ) إذا كانت النقطة (١ ، ١، ق) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم ق الممكنة.

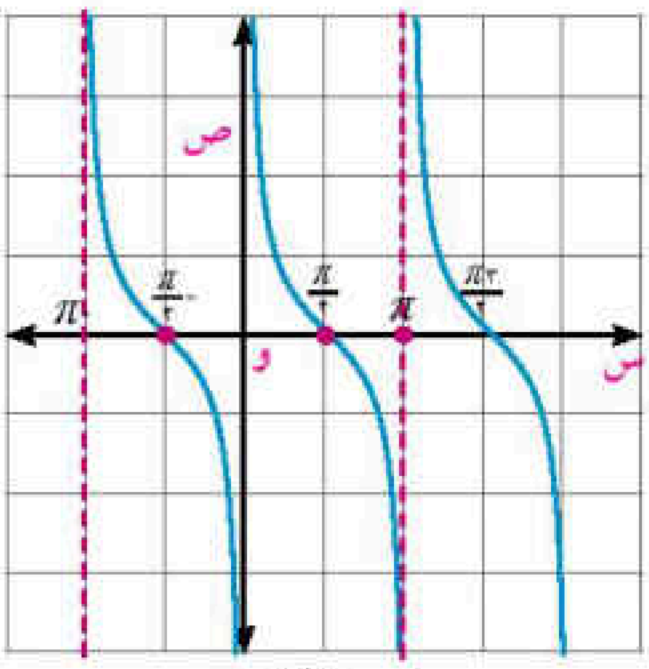
ثانيًا: التفاضل والتكامل



متطلبات قبلية في التفاضل والتكامل

اشتقاق مقلوبات الدوال المثلثية

١ - مشتقة دالة ظل التمام



ص = ظتا س

إذا كانت ص = ظتا س حيث س ∈ ع ، س ≠ نπ، ن ∈ ص

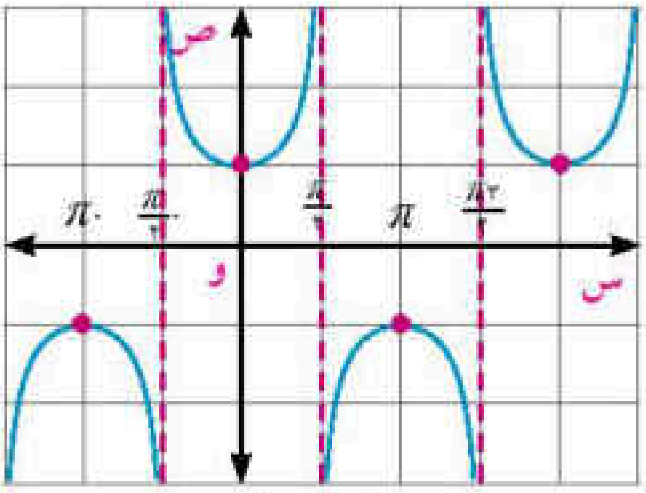
فإن : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ظتا س) = - قتا^{2} س

لاحظ أن :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}}{\text{د س}} (\frac{1}{\text{ظا س}}) = \frac{\text{د}}{\text{د س}} [\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}]$

$= \frac{\text{جا س} \times -\text{جا س} - \text{جتا س} \times \text{جتا س}}{(\text{جا س})^{2}} = - \frac{1}{(\text{جا س})^{2}} = -$ قتا^{2} س

٢ - مشتقة دالة القاطع



ص = قا س

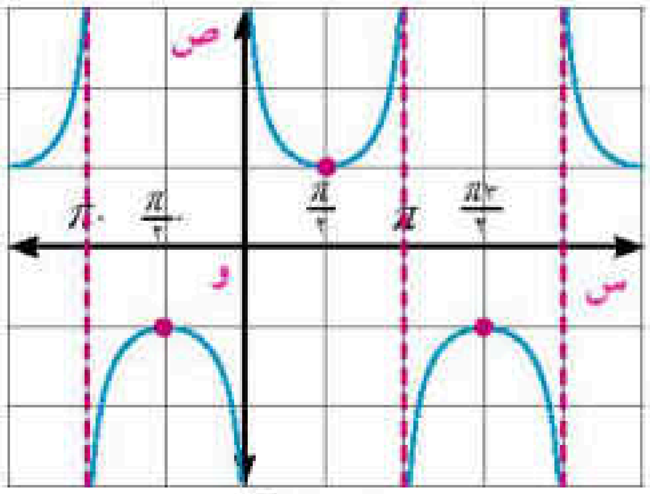
إذا كانت ص = قا س حيث :

س ∈ ع ، س ≠ $\frac{(2\text{ن} + 1)\pi}{2}$ ، ن ∈ ص

فإن:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قاس) = قا س ظا س (تحقق من ذلك)

٣ - مشتقة دالة قاطع التمام :



ص = قتا س

إذا كانت ص = قتا س حيث

س ∈ ع ، س ≠ ن π ، ن ∈ ص

فإن : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قتا س) = - قتا س ظتا س تحقق من ذلك

مثال

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(أ) ص = ٣ س^{٥} + ٤ ظتا س

(ب) ص = ٣ قا س - ٥ ظا س

(ج) ص = س^{٣} قتا س

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ × ٥س^{٤} + ٤ (- قتا^{٢} س) = ١٥ س^{٤} - ٤ قتا^{٢}س

(ب) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ (قا س ظا س) - ٥ قا^{٢}س = قاس [٣ ظا س - ٥ قا س]

(ج) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} قتا س + س^{٣} (- قتا س ظتا س) = س^{٢} قتاس [٣ - س ظتا س]

تكامل الدوال المثلثية

جدول التكاملات المثلثية الأساسية
∫ جا س ء س = - جتا س + ث
∫ جتا س ء س = جا س + ث
∫ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص
∫ قتا^{٢} س ء س = - ظتا س + ث س ≠ ن π ، ن ∈ ص
∫ قا س ظا س ء س = قا س + ث س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص
∫ قتا س ظتا س ء س = - قتا س + ث س ≠ ن π ، ن ∈ ص

الوحدة الأولى

الاشتقاق وتطبيقاته

Differentiation and it's Applications

مقدمة الوحدة

فى دراستك السابقة للدوال، تعرَّفتَ على دوال صريحة فى متغير واحد على الصورة ص = د(س) والعمليات على هذه الدوال وتركيبها، كما بحثتَ قابلية اشتقاق الدالة المتصلة على مجال ما، وأمكنك إيجاد المشتقة الأولى للدوال الجبرية و الدوال المثلثية.

فى هذه الوحدة ستتعرف دوال أخرى لا يمكن فصل متغيراتها، حيث ترتبط المتغيرات بعلاقة ضمنية أو بتعريفها من خلال متغير وسيط يعرف بالمتغير البارامترى؛ مما يتطلب دراسة أنماط أخرى للاشتقاق، مثل الاشتقاق الضمنى، والاشتقاق البارمترى الذى يعتمد على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) فى اشتقاق الدوال، كما نبحث وجود مشتقة مشتقة الدالة (المشتقة الثانية للدالة) فى إطار دراسة المشتقات العليا للدالة والتى تفسح المجال لدراسة تطبيقات حياتية متعددة.

كما تهتم هذه الوحدة ببعض التطبيقات المهمة للاشتقاق فى مجالات متعددة للرياضيات والفيزياء والاقتصاد والعلوم البيولوجية من خلال دراسة المعدلات الزمنية المرتبطة لتساعدك على نمذجة وحل بعض المشكلات الحياتية التى قد تصادفك.

مخرجات التعلم

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يوجد الاشتقاق لدوال ضمنية (صريحة ، ضمنية ، بارامترية ...).
- يوجد المشتقات العليا (الثانية والثالثة) لدوال مختلفة ويتعرف طريقة التعبير عنها .
- يوجد مشتقة الدالة الأسية ص = $هـ^{س}$، ص = $أ^{س}$
- يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{هـ}$ س، ص = $لو_{أ}$ س.
- يوجد المعدلات الزمنية المرتبطة متضمنة التطبيقات الفيزيائية.
- ينمذج ويحل مشكلات حياتية واقتصادية.

المصطلحات الأساسية

- الاشتقاق (التفاضل) Differentiation
- المشتقة الأولى First Derivative
- دالة صريحة Explicit Function
- دالة ضمنية Implicit function
- وسيط (بارامتر) Parameter
- اشتقاق ضمنى Implicit Defferentiation
- اشتقاق بارامترى Parametric Defferentiation
- مشتقات عليا Higher Derivatives
- معدل Rate
- معدلات مرتبطة Related Rates

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الدرس (١ - ٢): المشتقات العليا للدالة

الدرس (١ - ٣): مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدرس (١ - ٤): المعدلات الزمنية المرتبطة

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية (Geogebra, Graph)

مخطط تنظيمى للوحدة

- الاشتقاق وتطبيقاته
  - الاشتقاق
    - الاشتقاق الضمنى
    - الاشتقاق البارامترى
    - المشتقات العليا
  - تطبيقات الاشتقاق
    - معدلات زمنية مرتبطة
      - تطبيقات
        - بيولوجية
        - فيزيائية
        - هندسية

١ - ١ الاشتقاق الضمنى والبارامترى

Implicit and Parametric Defferentiation

الاشتقاق الضمنى *Implicit Defferentiation*

سبق لك إيجاد مشتقة دالة معرفة بالصورة ص = د(س) وهى دالة صريحة explicit function للمتغير المستقل س حيث تحدد قيمة ص مباشرة متى علم قيمة س مثل :

ص = ٤س^{٣} - ٥س + ٢ ، ص = جا (٢ س + ٣) ، ص = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ، ...

ويكون ص/ = ١٢ س^{٢} - ٥ ، ص/ = ٢ جتا (٢ س + ٣) ، ص/ = ...

أما إذا كانت ص مرتبطة بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معًا مثل:

س ص + ص - ٤ = ٠ (١) ، س^{٢} + ص^{٢} - ٩ = ٠ (٢)

فكل معادلة تعرف علاقة ضمنية implicit relation بين س ، ص؛ تعبر عن العلاقة بين إحداثيي نقطة (س ، ص) واقعة على منحناها البياني.

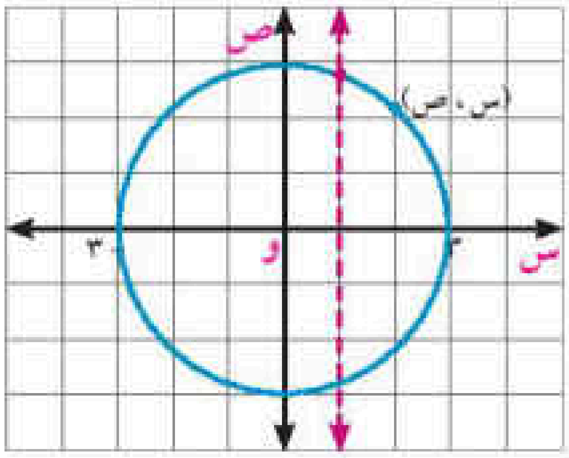
لاحظ أن :

١- يمكن كتابة المعادلة س ص + ص - ٤ = ٠ بالصورة:

ص (س + ١) = ٤ ∴ ص = $\frac{٤}{\text{س} + ١}$ حيث س ≠ -١

وفى هذه الحالة تعرف العلاقة الضمنية دالة واحدة صريحة.

٢- مجموعة النقط (س ، ص) التى تحقق المعادلة س^{٢} + ص^{٢} = ٩ ترسم دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات، ومن اختبار الخط الرأسى نلاحظ أن العلاقة س^{٢} + ص^{٢} = ٩ لا تمثل دالة



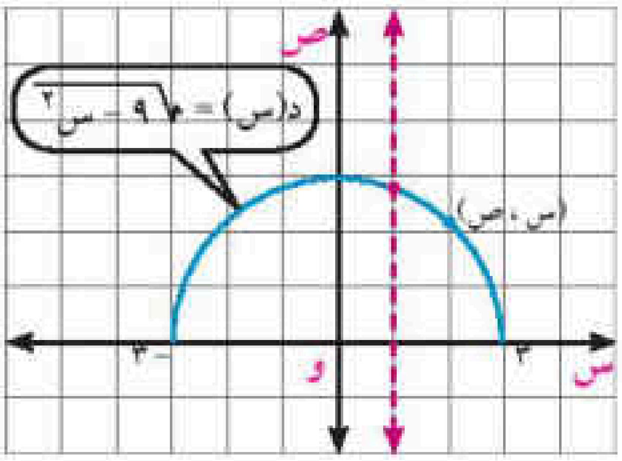
غير أن ص^{٢} = ٩ - س^{٢}

∴ ص = ± $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

فيمكن أن تعرِفُ العلاقة الضمنية س^{٢} + ص^{٢} = ٩ دالتين صريحتين

الأولى ص = $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$

مجالها [-٣ ، ٣] ومداها [٠ ، ٣] وقابلة للاشتقاق لكل س ∈]-٣ ، ٣[



سوف تتعلم

- الاشتقاق الضمنى
- الاشتقاق البارامترى

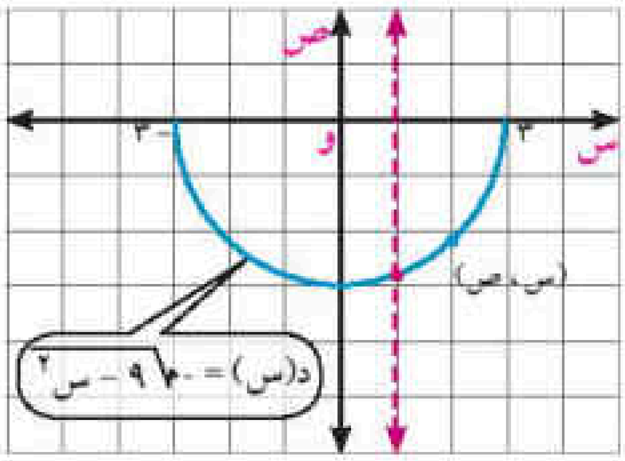
المصطلحات الأساسية

- علاقة *Relation*
- دالة صريحة *Explicit function*
- دالة ضمنية *Implicit function*
- وسيط *Parameter*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

Scientific calculator



والثانية: ص = -$\sqrt{٩ - س^٢}$

مجالها [-٣، ٣] ومداها [-٣، ٠]

وقابلة للاشتقاق لكل س∈]-٣ ، ٣[

فى كثير من المعادلات على الصورة د(س، ص) = ٠ يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة: لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى س ، تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية implicit function

عملية اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمنى) يتطلب اشتقاق كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لتحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

مثال

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

(أ) $س^٣ + ص^٢ - ٧س + ٥ص = ٨$ (ب) $٣ س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$

الحل

(أ)

لاحظ أن المعادلة لا تعطى ص صراحة بدلالة س، لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س مع مراعاة أن ص دالة للمتغير س وقابلة للاشتقاق فيكون:

$$٣س^٢ + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ٧ + ٥ \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

$$\frac{ءص}{ءس}(٢ص + ٥) = ٧ - ٣س^٢ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٧ - ٣س^٢}{٢ص + ٥}$$

(ب) ∵ $٣ س ص + ص^٢ = س^٢ - ٧$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س.

$$\therefore \frac{ء}{ءس}(٣س ص) + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س$$

$$٣س \frac{ءص}{ءس} + ص × ٣ + ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٢ س$$

$$\frac{ءص}{ءس}[٣س + ٢ ص] = ٢ س - ٣ ص \qquad \therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣س + ٢ص}$$

> **تذكر ان**
> إذا كانت ص دالة فى س وقابلة للاشتقاق فإن: $\frac{ء}{ءس}(ص)^ن = ن ص^{ن-١} \frac{ءص}{ءس}$

حاول أن تحل

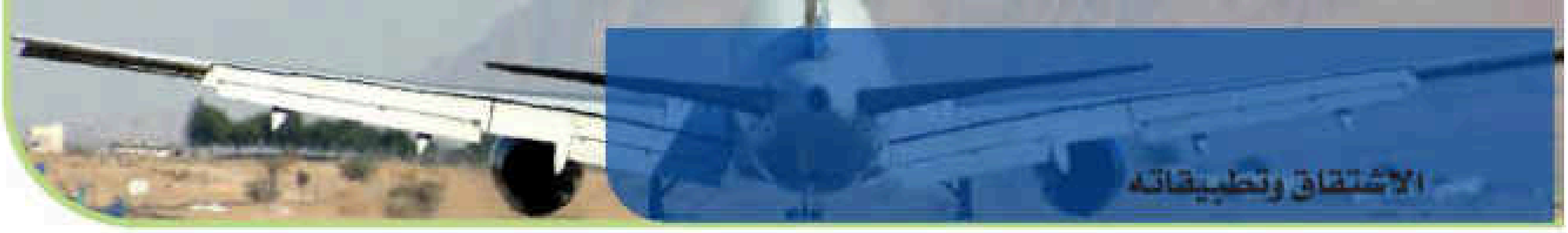
(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

(أ) $س^٣ - ٥ س ص + ص^٣ = ٤س$ (ب) $س^٢ ص + ص^٢ س = ٢٥$

مثال

(٢) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان:

(أ) جا ٢ ص = ص جتا ٣ س (ب) ظا٢ س + ظتا ص = س ص



الحل

(أ) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{جا ٢ ص}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{ص جتا ٣ س}\right)$$

$$\text{جتا ٢ ص} \times \text{٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص} \left[-\text{جا ٣ س} \times \text{٣}\right] + \text{جتا ٣ س} \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\left[\text{٢ جتا ٢ ص} - \text{جتا ٣ س}\right] = -\text{٣ ص جا ٣ س} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣ ص جا ٣ س}}{\text{جتا ٣ س} - \text{٢ جتا ٢ ص}}$$

(ب) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{طا ٢ س}\right) + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{ظتا ص}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س ص}\right)$$

$$\text{٢ قا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س} - \text{قتا}^{\text{٢}}\text{ ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\left[\text{س} + \text{قتا}^{\text{٢}}\text{ص}\right] = \text{٢قا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س} - \text{ص} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢قا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{قتا}^{\text{٢}}\text{ص}}$$

حاول أن تحل

(٢) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان:

(أ) س جتا ص + ص جتا س = ١ (ب) ٢ ص = جا س جتا ٢ ص

لاحظ أن: الصيغة النهائية للمشتقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فى الاشتقاق الضمنى تحوى كلًّا من س ، ص مما يجعل حسابها شاقًّا عند إحدى قيم س لحاجتنا أولاً لمعرفة قيمة ص المناظرة لها والتى يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية.

الاشتقاق البارامترى *Parametric Defferentiation*

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى ، والاحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين:

س = د(ن) ، ص = ر(ن) حيث د ، ر لهما مجال مشترك

فإن المعادلتين معًا تمثلان معادلة لمنحنى واحد معبرًا عنه بالصورة البارامترية

تعلم

للمنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د(ن) ، ص = ر(ن)

يكون $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن.

مثال

(٣) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

(أ) س = ٥ ن + ٣ ، ص = ١٦ ن$^{\text{٢}}$ + ٩ ، ن = ٥ (ب) س = ٣ جتا ٢θ ، ص = ٤ جا ٣θ ، $\theta = \frac{\pi}{\text{٤}}$

الحل

(أ) س = ٥ ن + ٣ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٥$ ، ص = ١٦ ن^{٢} + ٩ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٣٢$ ن

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣٢ن}}{٥}$ ويكون $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{ن}=٥} = ٣٢$

(ب) س = ٣ جتا ٢θ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٣ \times -$ جا ٢$\theta \times ٢ = -٦$ جا ٢θ

ص = ٤ جا ٢θ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = ٤ \times$ جتا ٢$\theta \times ٣ = ١٢$ جتا ٢θ

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءس}} = \frac{\text{١٢ جتا ٢}\theta}{\text{-٦ جا ٢}\theta} = \frac{\text{-٢ جتا ٢}\theta}{\text{جا ٢}\theta}$

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{-٢ جتا }\frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا }\frac{\pi}{٢}} = -٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة

(أ) س = (ن + ٧) (ن - ٢) ، ص = (ن^{٢} + ١) (ن - ٢) ، ن = ١.

(ب) س = قا$^{٢}\theta$ - ١ ، ص = طاθ ، $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$

(ج) س = $\sqrt{\text{٣ن - ٢}}$ ، ص = $\sqrt{\text{٤ن + ١}}$ ، ن = ٢

تفكير ناقد أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى

س = ٢ع^{٣} - ٥ع^{٢} - ٤ع + ١٢ ، ص = ٢ع^{٢} + ع - ٤ مماس أفقى وآخر رأسى.

مثال

(٤) أوجد مشتقة (٤ س^{٣} - ٩س^{٢} + ٥) بالنسبة إلى (٣س^{٢} + ٧)

الحل

بوضع ص = ٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٥ ، ع = ٣س^{٢} + ٧ فتكون ص = د(س)، ع = ر(س)

الدالتان د، ر قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى س باعتبار س بارامتر لكل من المتغيرين ص ، ع

∴ من الاشتقاق البارامترى نجد أن:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ص}'}{\text{ع}'} = \frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ - ١٨ س}}{\text{٦ س}} = ٢$ س - ٣ أى أن $\frac{\text{ء}}{\text{ء(٣س}^{٢}\text{+٧)}}$ [٤س^{٣} - ٩س^{٢} + ٥] = ٢ س - ٣

حاول أن تحل

(٤) باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد:

(أ) مشتقة س^{٢} + ١ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{س}^{٢}\text{ - ١}}$

(ب) مشتقة $\sqrt{\text{٨ + س}^{٣}}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ عند س = ١

(ج) مشتقة س - جا س بالنسبة إلى ١ - جتا س عند س = $\frac{\pi}{٣}$

تمـــارين الدرس (١ - ١)

أولًا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ١$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوي:

أ) $س$ ب) $\frac{١}{ص}$ ج) $-\frac{س}{ص}$ د) $-\frac{ص}{س}$

(٢) إذا كانت $س^٢ + ص^٢ = ٢ س ص$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوي:

أ) -١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

(٣) إذا كانت $ص^٢ - ٢\sqrt{س} = ٠$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوي:

أ) $\frac{ص^٢}{\sqrt{س}}$ ب) $\sqrt{س}$ ج) $\frac{س}{ص^٣}$ د) $\frac{١}{ص^٣}$

(٤) إذا كان $س = ٢ن^٢ + ٣$ ، $ص = \sqrt{ن^٣}$ ، $ن = ١$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ يساوي:

أ) $\frac{٣}{٨}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) ٢ د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى $س ص^٢ = ٣$ عند النقطة (٣ ، ١) يساوي:

أ) -٣ ب) $-\frac{١}{٦}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٣}{٢}$

ثانيًا: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

(٦) $س^٢ - ٤ص^٢ + ٧ = ٠$

(٧) $س^٤ + ٣ص^٤ - ٢ = ٠$

(٨) $س^٢ - ٢ س ص = ٥ - ص^٢$

(٩) $س^٣ + ٦ س ص = ٤ ص + ٣$

(١٠) $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = أ$

(١١) $س ص + جا ص = ٥$

(١٢) $س جا ص + ص جتا س = ٠$

(١٣) $س قتا ص = ص ظتا س$

(١٤) $س^٢ جا ص - ص^٢ جا س = ٩$

(١٥) $جا٢س جتا٢ص = \frac{٣}{٤}$

ثالثًا: أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة:

(١٦) $س = ١٣ - ٢ن$ ، $ص = ٤ن^٢ - \sqrt{ن}$ ، $ن = ٤$

(١٧) $س = جا ٢\pi\theta$ ، $ص = جتا ٢\pi\theta$ ، $\theta = \frac{١}{٦}$

(١٨) $س = ٥ + قا^٢ ٣\theta$ ، $ص = ١ - ظا ٣\theta$ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

(١٩) أوجد ميل المماس للمنحنى $جتا \sqrt{\pi ص} = ٣س + ١$ عند النقطة $(-\frac{١}{٣} ، \frac{\pi}{٤})$

(٢٠) أوجد مشتقة $\frac{س + ١}{س - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢س + ١}$ عند $س = ٤$

(٢١) أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى $س = ٢ن^٣ - ٥ن^٢ + ٤ن - ٩$ ، $ص = ٢ن^٢ + ن - ٥$

أ) مماس رأسي. ب) مماس أفقي.

المشتقات العليا للدالة

Higher Derivatives of a Function

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقات ذات رتب أعلى لدالة.

المصطلحات الأساسية

- رتبة *Order*
- مشتقة *Derivative*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية. *Scientific calculator*

فكر و ناقش

إذا كانت $ص = د(س)$ حيث $ص = س^٤ + ٥س^٣ - ٢س + ٣$ أوجد مشتقة الدالة د،
هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة إلى س ؟ لماذا؟
هل تتوقف عملية الاشتقاق؟ فسر إجابتك.

تعلم

المشتقات ذات الرتب العليا *(Higher - Order Derivative)*

- **إذا كانت** $ص = د(س)$ حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها الأولى (First derivative) هي $ص' = \frac{ءص}{ءس} = د'(س)$ وتمثل دالة جديدة.
- **وإذا كانت** المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ تسمى المشتقة الثانية (Second Derivative) للدالة د وتمثل دالة أخرى
ويُرمز لها بالرمز $ص'' = \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = د''(س)$
- بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة (Third Derivative) للدالة د
ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ ، ... وهكذا

تسمى المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا، وتكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلي :

$$ص^{(ن)} = \frac{ء^نص}{ءس^ن} = د^{(ن)}(س) \quad \text{حيث ن عدد صحيح موجب}$$

لاحظ أن :

١- $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

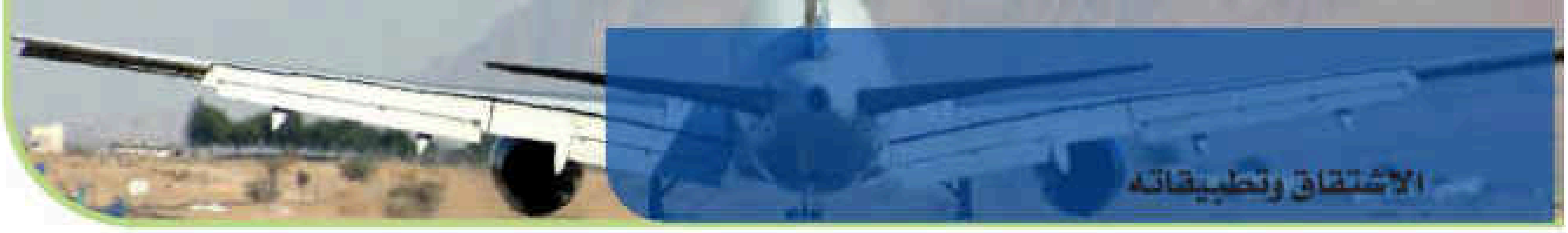
٢- يوجد اختلاف بين $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

مثال

(١) أوجد المشتقة الثانية لكل من:

(أ) $ص = ٢س^٤ + ٣س - ٥$ (ب) $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$

(جـ) $ص = جا(٣س - ٢)$ (د) $ص = \sqrt{٣س - ٢}$



الحل

(أ) $\because$ ص $= ٢س^{٤} + ٣س - ٥$ ، س $\in$ ح $\quad \therefore \frac{دص}{دس} = ٨س^{٣} + ٣$ ، $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢٤ س^{٢}$

(ب) $\because$ ص $= \frac{س + ١}{س - ١}$ ، س $\neq ١$ $\quad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{س - ١ - (س + ١)}{(س - ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(س - ١)^{٢}}$ ، س $\neq ١$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{د}{دس} [-٢ (س - ١)^{-٢}] = \frac{٤}{(س - ١)^{٣}}$ ، س $\neq ١$

(ج) $\because$ ص $=$ جا $(٣س - ٢)$ ، س $\in$ ح $\quad \therefore \frac{دص}{دس} = ٣$ جتا $(٣س - ٢)$ ، $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -٩$ جا $(٣س - ٢)$

(د) $\because$ ص $= \sqrt{٣س - ٢}$ ، س $\geqslant \frac{٢}{٣}$ $\quad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}}$ ، س $> \frac{٢}{٣}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{د}{دس} [\frac{٣}{٢} (٣س - ٢)^{-\frac{١}{٢}}] = -\frac{٩}{٤\sqrt{(٣س - ٢)^{٣}}}$ ، س $> \frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

(١) أوجد المشتقة الثالثة لكل من:

(أ) ص $=$ س^{٤} $-$ ٢ س^{٣} $+$ ٥ (ب) ع $= (٢ن - ١)^{٤}$

(ج) د(س) $=$ جتا $(٢ س + \pi)$ (د) د(س) $= \frac{س}{س - ١}$

تفكير ناقد: إذا كانت ص $=$ جا أ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالي، أوجد ص$^{(٢٥)}$

مثال

(٢) إذا كانت ص^{٢} $+$ ٢ س ص $=$ ٨ أثبت أن: $(س + ص) \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ \frac{دص}{دس} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} =$ صفر

الحل

(أ) $\because$ ص^{٢} $+$ ٢ س ص $=$ ٨ ، **باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س**

$\therefore ٢ص \frac{دص}{دس} + ٢س \frac{دص}{دس} + ٢ص = ٠$ **بالقسمة على ٢**

$(س + ص) \frac{دص}{دس} + ص = ٠$ **باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س**

$\therefore (س + ص) \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + \frac{دص}{دس} (١ + \frac{دص}{دس}) + \frac{دص}{دس} = ٠$

ويكون $(س + ص) \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ \frac{دص}{دس} + (\frac{دص}{دس})^{٢} =$ صفر

حاول أن تحل

(٢) (أ) إذا كانت س^{٢} $+$ ص^{٢} $=$ ٩ **أثبت أن:** ص $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + (\frac{دص}{دس})^{٢} + ١ = ٠$

(ب) إذا كانت ص $=$ طا س **أثبت أن:** $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢$ ص $(١ + ص^{٢})$

معادلات بارامترية

مثال

٣ إذا كانت $\text{س} = ٢\text{ن}^٣ - ٥$ ، $\text{ص} = ٦\text{ن}^٢ + ١$ أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ عند $\text{ن} = ١$

الحل

باشتقاق كل من س ، ص بالنسبة للبارامتر ن

$\therefore \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = ٦\text{ن}^٢$ ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = ١٢\text{ ن}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} \times \frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١٢\text{ن}}{٦\text{ن}^٢} = ٢\text{ ن}^{-١}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

ويكون $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[٢\text{ن}^{-١}] = -٢\text{ن}^{-٢} \times \frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}}$

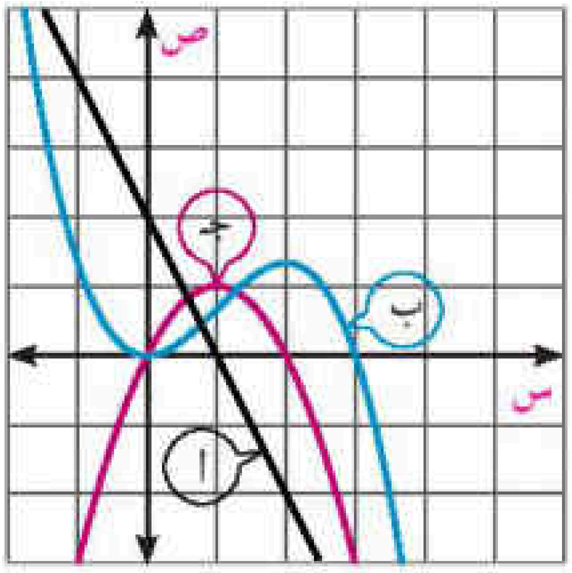
$= \frac{-٢}{\text{ن}^٢} \times \frac{١}{٦\text{ن}^٢} = -\frac{١}{٣\text{ن}^٤}$ ، $\text{ن} \neq ٠$

عند $\text{ن} = ١$ $\therefore \frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٣ إذا كانت $\text{س} = \text{ع}^٢ - ٢\text{ع}$ ، $\text{ص} = \text{ع}^٢$

أوجد $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ء س}^٢}$ ، $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ء س}^٣}$ عند $\text{ع} = ٢$



تفكير ناقد: يبين الشكل المقابل تمثيلاً بيانيًا لمنحنيات الدوال د(س)، د/(س) ، د//(س) حيث د(س) كثيرة حدود، حدد منحنى كل دالة.

نشاط

باستخدام البرنامج الرسومى geogebra أو أى برنامج آخر ارسم الدوال التالية ومشتقاتها الأولى والثانية وسجل ملاحظاتك.

أ $\text{د(س)} = \text{س}^٣ - ٤\text{ س}^٢ + ١٢$

ب $\text{ر(س)} = \frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٤$

هل تتوافق ملاحظاتك مع قرارك في بند تفكير ناقد؟

تمارين ١ - ٢

أوجد المشتقة الثالثة لكلًا مما يأتى:

① $\text{ص} = \text{س}^{٥} - ٤\text{س}^{٣} + ٣$

② $\text{ص} = \frac{٢\,\text{س}}{\text{س} + ١}$

③ $\text{ص} = \text{جا}\,(٢\,\text{س} - ٧)$

④ $\text{ص} = \text{جتا}\,(\pi - ٣\,\text{س})$

⑤ $\text{ص} = \text{جا س جتا س}$

⑥ $\text{ص} = \sqrt{٢\,\text{س} - ٥}$

أجب عمَّا يأتي:

⑦ إذا كان $٣\text{س}^{٢} + ٥ = ٢\,\text{س ص}$ أثبت أن: $\text{س}\,\frac{\text{ءٍ}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٢\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣$

⑧ إذا كان $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤$ أثبت أن: $\text{ص}^{٣}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٤ = \text{صفر}$

⑨ إذا كان $\text{ص} = ٣\,\text{جتا}\,(٢\,\text{س} + ١)$ أثبت أن: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٤\,\text{ص} = ٠$

⑩ إذا كان $\text{س ص} = \text{جا س جتا س}$ أثبت أن: $\text{س}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٢\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + ٤\,\text{س ص} = ٠$

⑪ إذا كان $\text{ص} = \text{س جا س}$ أثبت أن: $\text{س}\,\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ء س}^{٣}} + \text{س}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + ٢\,\text{ص} = ٠$

⑫ إذا كان $\text{ص} = \text{قا س}$ أثبت أن: $\text{ص}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢} = \text{ص}^{٢}\,(٣\text{ص}^{٢} - ٢)$

⑬ إذا كان $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\,\text{س} - ٣$ ، $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = \text{س}^{٢} - ١$ أوجد: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء ع}^{٢}}$ عند $\text{س} = ٢$

⑭ إذا كان $\text{س} = ٣\text{ن}^{٢} - ١$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٣} + ٢$ أوجد: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ عند $\text{ن} = ٤$

⑮ إذا كان $\text{س} = \frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$ أوجد: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عند $\text{ع} = ٢$

⑯ إذا كان $\text{س} = \text{قا ع}$ ، $\sqrt{\text{ص}} = \text{ظا ع}$ أثبت أن: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} = ٢$

١ - ٣ مشتقات الدوال الأسية واللوغارتمية

Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

سوف تتعلم

- مشتقات الدوال الأسية.
- مشتقات الدوال اللوغارتمية.
- التفاضل اللوغاريتمى.
- المشتقات العليا للدوال الأسية واللوغارتمية.
- نمذجة المشكلات.

المصطلحات الأساسية

- مشتقة *Derivative*
- قاعدة السلسلة *Chain Rule*
- المشتقة الأولى *First Derivative*
- الاشتقاق اللوغاريتمى *Logarithmic Differentiation*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

تعريف

يعرف العدد هـ من العلاقة :

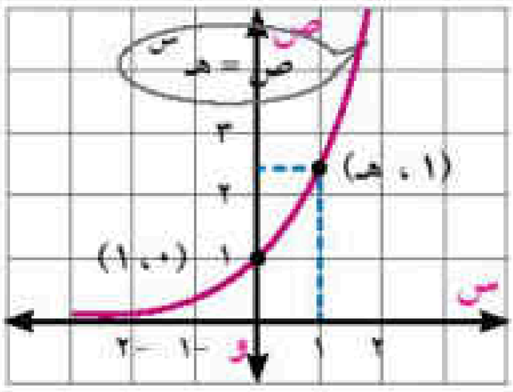
$$هـ = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{\lfloor\underline{ن}}$$

$$هـ = ١ + \frac{١}{\lfloor\underline{١}} + \frac{١}{\lfloor\underline{٢}} + \frac{١}{\lfloor\underline{٣}} + \ldots\ldots \infty$$

تعلم

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى *Natural Exponential Function*

هى دالة أسية أساسها هـ ، د(س) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ع



$$\lim_{س \to \infty} هـ^{س} = \infty \text{ ، }$$

$$\lim_{س \to -\infty} هـ^{س} = \text{صفر}$$

لاحظ أن

١) مجال الدالة د حيث د(س) = $هـ^{س}$ هو ع ومداها] ٠، ∞ [

٢) منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)

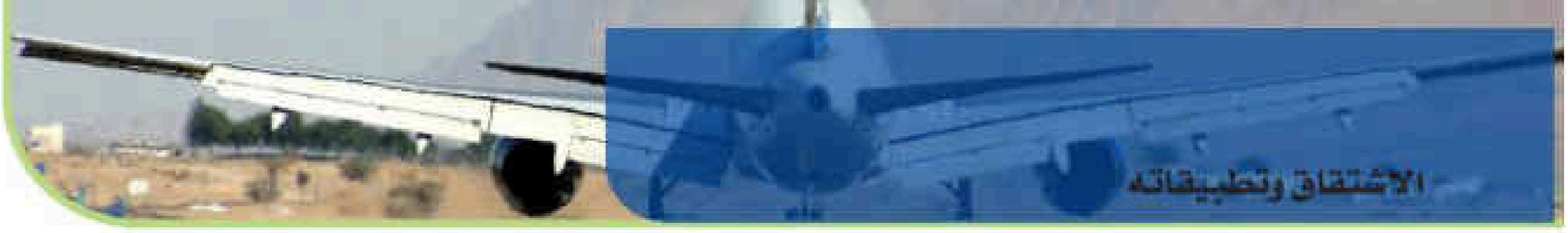
٣) د(س) = $هـ^{س}$ دالة احادية *(One - to - One)*

تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعى

٤) نستخدم الرمز *exp (x)* عند رسم الدالة باستخدام أى برنامج رسومى

٥) $هـ^{س} = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{\lfloor\underline{ن}}$

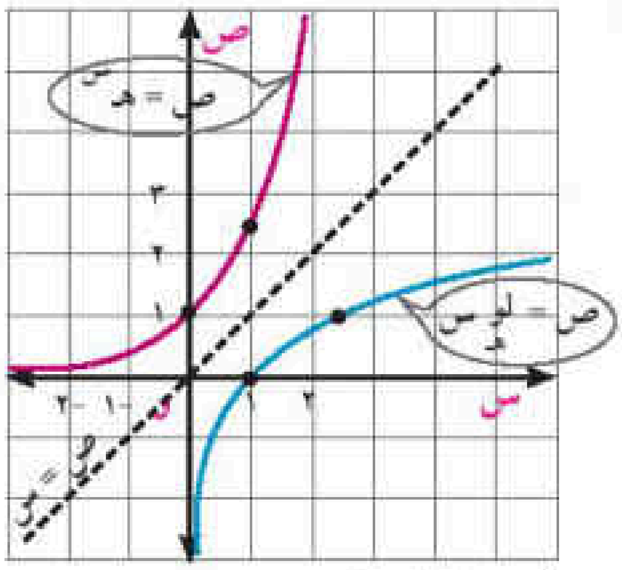
$$= ١ + \frac{س}{\lfloor\underline{١}} + \frac{س^{٢}}{\lfloor\underline{٢}} + \frac{س^{٣}}{\lfloor\underline{٣}} + \ldots\ldots \infty$$



دالة اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm Function

هي لوغاريتمية أساسها هـ ، د(س) = $لو_{هـ}$ س ، س ∋ $ع^+$



$نهـا_{س \to \infty}$ $لو_{هـ}$ س = ∞ ،

$نهـا_{س \to ٠^+}$ $لو_{هـ}$ س = -∞

لاحظ أن:

١) مجال الدالة د حيث د(س) = $لو_{هـ}$ س هو $ع^+$ ومداها ع

٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

٣) هي دالة عكسية للدالة ص = $هـ^{س}$

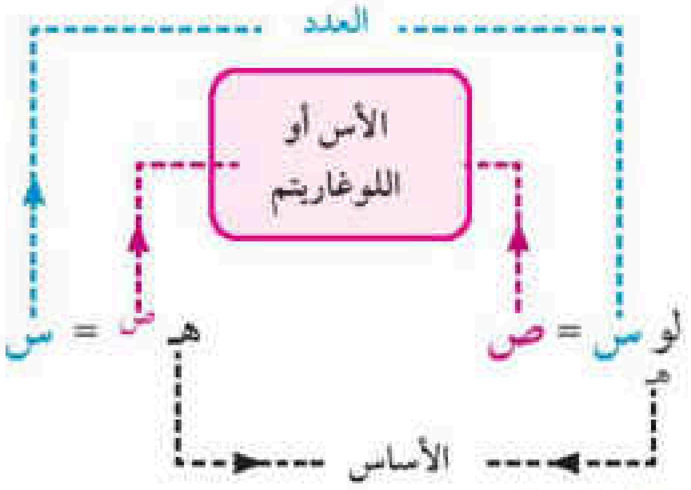
٤) يستخدم الرمز *ln(x)* لرسم الدالة باستخدام أي برنامج رسومي للحاسب الآلي.

٥) لإيجاد قيمة $لو_{هـ}$ ١٠ مثلًا اضغط على المفاتيح التالية:

ابدأ ← ln 1 0 =

نجد أن $لو_{هـ}$ ١٠ = ٢,٣٠٢٥٨٥٠٩٣ لأقرب ٩ أرقام عشرية.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي



اللوغاريتم الطبيعي له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها.

إذا كان س ∋ $ع^+$ ، ص ∋ ع ، أ ∋ $ع^+$ - {١} فإن:

١) الصورة $لو_{هـ}$ س = ص تكافيء الصورة $هـ^{ص}$ = س

٢) $هـ^{لو_{هـ} س}$ = س

٣) $لو_{هـ}$ هـ = ١

٤) $لو_{هـ}$ ١ = صفر

٥) $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$ **(خاصية تغيير الأساس)**

لكل س ، ص ∋ $ع^+$ ، ن ∋ ع

٦) $لو_{هـ}$ س ص = $لو_{هـ}$ س + $لو_{هـ}$ ص

٧) $لو_{هـ} \frac{س}{ص}$ = $لو_{هـ}$ س - $لو_{هـ}$ ص

٨) $لو_{هـ} س^{ن}$ = ن $لو_{هـ}$ س

٩) $لو_{هـ}$ س × $لو_{س}$ هـ = ١

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى

Derivative of Natural Exponential Function

> **إذا كانت** $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ **فإن** $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\because \text{هـ}^{\text{س}} = \frac{\text{س}^{٠}}{٠!} + \frac{\text{س}}{١!} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \text{......} \infty$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \frac{١}{١!} + \frac{٢\text{س}}{٢!} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٣!} + \text{......} \infty$$

$$= \frac{\text{س}^{٠}}{٠!} + \frac{\text{س}}{١!} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \text{......} \infty$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}}$$

مثال

مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى

١) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{هـ}^{\text{س}}$ ب) $\text{ص} = \text{س}^{٣}\text{هـ}^{\text{س}}$ جـ) $\text{ص} = \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$

الحل

أ) $\because \text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{هـ}^{\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\text{س} + ٣\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = ٢\text{س} + ٣\text{هـ}^{\text{س}}$

ب) $\because \text{ص} = \text{س}^{٣}\text{هـ}^{\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{٣}\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{هـ}^{\text{س}}\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{٣})$

$$= \text{س}^{٣}\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}^{٢}\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} + ٣)$$

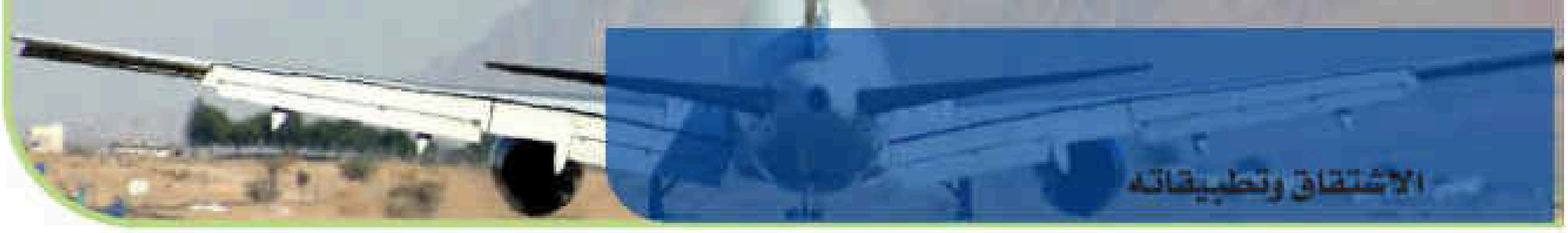
جـ) $\because \text{ص} = \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{(\text{س}+١)\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٢\text{هـ}^{\text{س}}) - ٢\text{هـ}^{\text{س}}\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$

حاول أن تحل

١) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل مما يأتى:

أ) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}\ ٢\text{س}$ ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا س}$ جـ) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{طا س}}$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ عند أى نقطة عليه والإحداثى الصادى لهذه النقطة؟ فسر إجابتك



قاعدة السلسلة

إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، $د(ع) = هـ^{ع}$ فإن: $\frac{د}{دس}(هـ^{ع}) = هـ^{ع} \cdot \frac{دع}{دس}$

مثال

(٢) أوجد المشتقة الأولى لكل من:

(أ) $ص = هـ^{٣س^٢+٥}$ (ب) $ص = ٣هـ^{قاس}$ (جـ) $ص = (هـ^{٣س} - هـ^{-٢س})^٥$

الحل

(أ) $\because ص = هـ^{٣س^٢+٥}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = هـ^{٣س^٢+٥} \times \frac{د}{دس}(٣س^٢ + ٥) = ٦س هـ^{٣س^٢+٥}$

(ب) $\because ص = ٣هـ^{قاس}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = ٣هـ^{قاس} \times \frac{د}{دس}(قاس) = ٣هـ^{قاس} \cdot قاس طاس$

(جـ) $\because ص = (هـ^{٣س} - هـ^{-٢س})^٥$ $\therefore \frac{دص}{دس} = ٥(هـ^{٣س} - هـ^{-٢س})^٤ [٣هـ^{٣س} + ٢هـ^{-٢س}]$

حاول أن تحل

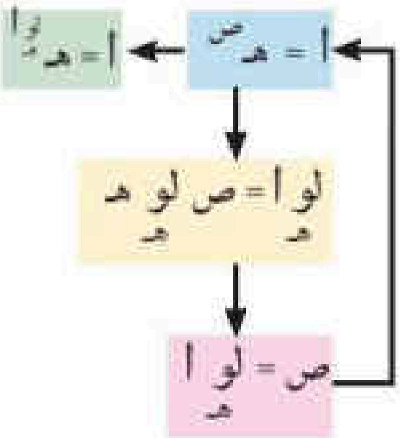
(٢) أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

(أ) $ص = ٢س + هـ^{٦س}$ (ب) $ص = \frac{١}{٢}هـ^{٧-س^٢}$ (جـ) $ص = (هـ^{٢س} + هـ^{-٢س})^٣$

تعلم

مشتقة الدالة الأسية للأساس أ

Derivative of Exponential Function to the Base a



إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ **فإن** $د'(س) = أ^{س} لو_{هـ} أ$

لاحظ أن $أ = هـ^{لوأ}$ (من خواص اللوغاريتمات) $\therefore أ^{س} = [هـ^{لوأ}]^{س} = هـ^{س لوأ}$

ويكون $\frac{د}{دس}(أ^{س}) = \frac{د}{دس}(هـ^{س لوأ}) = هـ^{س لوأ} \times لو_{هـ} أ = أ^{س} \times لو_{هـ} أ$

وبوجه عام فإن: $\frac{د}{دس}(أ^{ع}) = أ^{ع} لو_{هـ} أ \cdot \frac{دع}{دس}$

مثال

مشتقه الدالة الأسية

(٣) أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

(أ) $ص = ٥ \times ٦^{س}$ (ب) $ص = ٣^{(٣س^٢ - ٥س + ٢)}$ (جـ) $ص = هـ^{جاس} \times ٢^{-٥س}$

الحل

(أ) $\because ص = ٥ \times ٦^{س}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = ٥\frac{د}{دس}(٦^{س}) = ٥ \times ٦^{س} لو_{هـ} ٦$

ب) $\because \text{ص} = ٣^{٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٦\text{س} - ٥) \times ٣^{(٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢)} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

ج) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times ٢^{-٥\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (٢^{-٥\text{س}}) + ٢^{(-٥\text{س})} \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \text{هـ}^{\text{جاس}}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} [-٥ \times ٢^{-٥\text{س}} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥] + ٢^{-٥\text{س}} [\text{هـ}^{\text{جاس}} \text{جتا س}]$

$= ٢^{-٥\text{س}} \text{هـ}^{\text{جاس}} [\text{لو}_{\text{هـ}} ٢^{-٥} + \text{جتا س}]$

حاول أن تحل

٣) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

أ) $\text{ص} = ٥^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$ ب) $\text{ص} = ٢^{\text{قا}^٢\text{س}}$ ج) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}} ١^{\text{س}^٢ - ٥}$

تعلم

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي *Derivative of Natural Logarithm Function*

> **إذا كانت** $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ **فإن** $\text{د}'\text{(س)} = \frac{١}{\text{س}}$

لاحظ أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة عكسية للدالة الأسية

إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ **فإن** $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$ (١)

بإشتقاق طرفي العلاقة (١) بالنسبة إلى س $\therefore ١ = \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}}$ **أى أن:** $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

مثال

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

٤) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $\text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ب) $\text{ص} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ج) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١}$

الحل

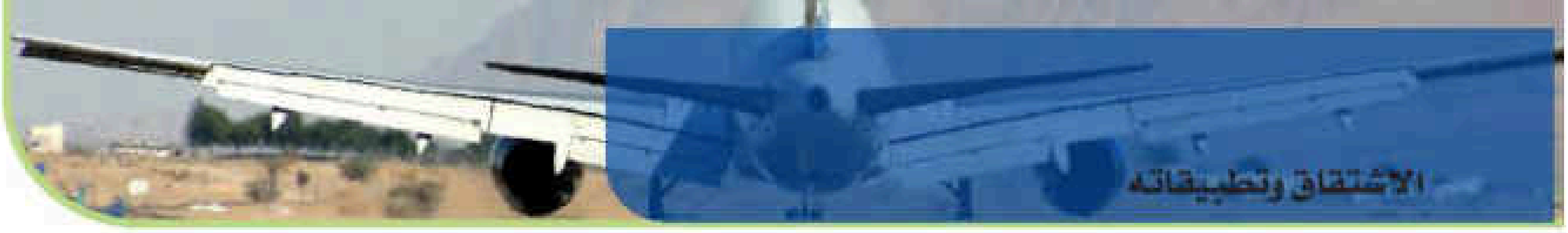
أ) $\because \text{ص} = ٣\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ + \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) = ٣ + \frac{١}{\text{س}}$

ب) $\because \text{ص} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٢\text{س}^٥ - ٣) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) + (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}) \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (٢\text{س}^٥ - ٣)$

$= (٢\text{س}^٥ - ٣) \times \frac{١}{\text{س}} + ١٠\text{س}^٤ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$= \frac{١}{\text{س}} [(٢\text{س}^٥ - ٣) + ١٠\text{س}^٥ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}]$

ج) $\because \text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١) \times \frac{١}{\text{س}} - (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - ١) \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١)^٢} = \frac{٢}{\text{س} (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + ١)^٢}$



حاول أن تحل

(٤) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(أ) ص = ٥ - ٣ لو$_{هـ}$ س (ب) ص = س^{٢} لو$_{هـ}$ س (جـ) ص = $\frac{١ - ٢ لو_{هـ} س}{لو_{هـ} س}$

تفكير ناقد: ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى ص = لو$_{هـ}$ س عند أى نقطة عليه والإحداثى السينى لنقطة المماس؟ فسر إجابتك.

قاعدة السلسلة

- **إذا كانت** ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، د(ع) = لو$_{هـ}$ ع

فإن: $\frac{ء}{ءس}$ [لو$_{هـ}$ ع] = $\frac{١}{ع}$ • $\frac{ءع}{ءس}$

- **إذا كانت** س > ٠ **فإن:** $\frac{ء}{ءس}$ [لو$_{هـ}$ (-س)] = $\frac{١}{-س}$ × -١ = $\frac{١}{س}$

- **وبوجه عام** $\frac{ء}{ءس}$ [لو$_{هـ}$ |س|] = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

، $\frac{ء}{ءس}$ [لو$_{هـ}$ |ع|] = $\frac{ع'}{ع}$ حيث ع دالة قابلة للاشتقاق فى س.

مثال

(٥) أوجد $\frac{ء}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(أ) ص = لو$_{هـ}$ (٢س^{٣} + ٩) (ب) ص = س^{٤} لو$_{هـ}$ س^{٣} (جـ) لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٢}}{س + ٧}$

الحل

(أ) ∵ ص = لو$_{هـ}$ (٢س^{٣} + ٩) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢س^{٣} + ٩}$ × $\frac{ء}{ءس}$ (٢س^{٣} + ٩) = $\frac{٦س^{٢}}{٢س^{٣} + ٩}$

(ب) ∵ ص = س^{٤} لو$_{هـ}$ س^{٣} ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٤} $\frac{ء}{ءس}$ (لو$_{هـ}$ س^{٣}) + لو$_{هـ}$ س^{٣} $\frac{ء}{ءس}$ (س^{٤})

= س^{٤} × $\frac{١}{س^{٣}}$ × ٣س^{٢} + لو$_{هـ}$ س^{٣} × ٤ س^{٣}

= ٣س^{٣} + ٤س^{٣} لو$_{هـ}$ س^{٣} = س^{٣} [٣ + ٤ لو$_{هـ}$ س^{٣}]

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ (لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٢}}{س + ٧}$) = $\frac{س + ٧}{س^{٢}}$ × $\frac{(س + ٧)(٢س) - س^{٢} × ١}{(س + ٧)^{٢}}$ = $\frac{س + ١٤}{س(س + ٧)}$

حاول أن تحل

(٥) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

(أ) ص = لو$_{هـ}$ (٧س - ٣)^{٢} (ب) ص = ٢س^{٢} لو$_{هـ}$ س^{٣} (جـ) ص = $\frac{س}{لو_{هـ} س}$

تعلم

مشتقه الدالة اللوغاريتمية للأساس أ Derivative of Logarithmic Function to the Base a

إذا كانت د(س) = $لو_{أ}$ س فإن د′(س) = $\frac{١}{س لو_{هـ} أ}$

لاحظ $\frac{ء}{ءس}(لو_{أ}س) = \frac{ء}{ءس}\left[\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}\right] = \frac{١}{لو_{هـ} أ}\frac{ء}{ءس}[لو_{هـ} س] = \frac{١}{س} \cdot \frac{١}{لو_{هـ} أ}$

ويكون $\frac{ء}{ءس}(لو_{أ}س) = \frac{١}{س} لو_{أ} هـ$

وبوجه عام $\frac{ء}{ءس}(لو_{أ} ع) = \frac{١}{ع لو_{هـ} أ} \cdot \frac{ءع}{ءس}$

تذكر أن

من خواص اللوغاريتمات

$لو_{أ} س = \frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$

$لو_{هـ} أ \times لو_{أ} هـ = ١$

مشتقه الدالة اللوغارتيمية

مثال

٦ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ ص = $لو_{٣}$ س ب ص = $لو_{٥}$ (٣س - ٢) ج ص = لو (٢س - ٣)^{٢}

الحل

أ ∵ ص = $لو_{٣}$ س ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س} \times \frac{١}{لو_{هـ} ٣} = \frac{١}{س لو_{هـ} ٣}$

ب ∵ ص = $لو_{٥}$ (٣س - ٢) ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{(٣س - ٢) لو_{هـ} ٥}$

ج ∵ ص = ٢لو |٢س - ٣| ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \times ٢}{(٢س - ٣) لو_{هـ} ١٠} = \frac{٤}{(٢س - ٣) لو_{هـ} ١٠}$

حاول أن تحل

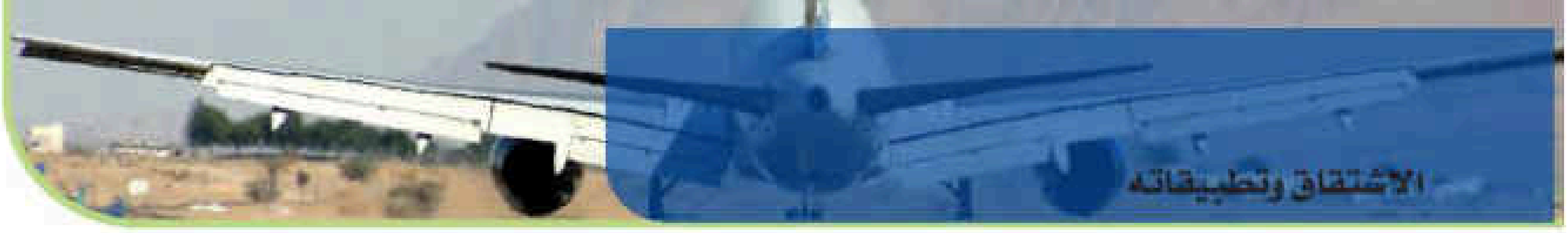
٦ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة:

أ ص = $لو_{٢}$ ٥س ، س = ٢ ب ص = ٤ لو (٣س + ١) ، س = ١

ج ص = $لو_{٢}$ (٢س^{٢} - ٣)^{٤} ، س = ١ د ص = ٣ (لو س)^{٢} ، س = ٣

مثال

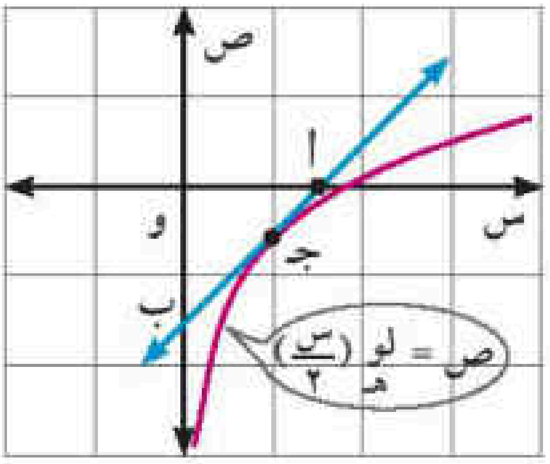
٧ تطبيقات هندسية: إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للمنحنى ص = $لو_{هـ} \frac{س}{٢}$ فى النقطة جـ (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{أب}$



الحل

لإيجاد طول $\overline{\text{أب}}$ نتبع المخطط المقابل

معادلة المماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ← نقط التقاطع أ، ب ← طول $\overline{\text{أب}}$



ميل المماس عند أى نقطة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢ \times ١}{\text{س}} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{س}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمس المنحنى فى النقطة جـ (١ ، ص)

فإن ص = $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{٢} = -\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$ أى أن جـ (١ ، $-\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$)، وعندها

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$، وتكون معادلة المماس $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عند جـ هى:

ص + $\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$ = س − ١

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع محور السينات فى النقطة أ ∴ أ (١ + $\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$ ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ∴ ب (٠ ، −١ − $\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$)

ويكون $(\text{أب})^٢ = (١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢)^٢ + (١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢)^٢$ ∴ أب = $\sqrt{٢}\,(١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢)$

حاول أن تحل

(٧) إذا كان العمودى للمنحنى ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ٢س عند النقطة أ (١ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ٢) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

تطبيقات رياضية

الاشتقاق اللوغاريتمى

Logarithmic Differentiation

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

مثال

(٨) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

(أ) ص = $(\text{س}^٣ + ٥)^{\text{س}}$ (ب) ص = $[\text{جا س}]^{\text{ظاس}}$

الحل

(أ) ∵ ص = $(\text{س}^٣ + ٥)^{\text{س}}$ — **بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة**

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = س $\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^٣ + ٥)$ — **باشتقاق طرفى العلاقة بالنسبة إلى س**

$\frac{١}{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^٣ + ٥) + \frac{\text{س}}{\text{س}^٣ + ٥} \times ٣\text{س}^٢$ **بضرب الطرفين × ص = $(\text{س}^٣ + ٥)^{\text{س}}$**

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س}^٣ + ٥)^{\text{س}} \left[\frac{٣\text{س}^٣}{\text{س}^٣ + ٥} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^٣ + ٥)\right]$

(ب) ∵ ص = $[\text{جا س}]^{\text{ظاس}}$ — **بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفى العلاقة**

$\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = ظا س $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جا س — **باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س**

$\frac{١}{ص}\frac{ءص}{ءس} =$ طاس × $\frac{ء}{ءس}$ (لوهـ جاس) + لوهـ جاس × $\frac{ء}{ءس}$ (طاس)

$= \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{جاس} \times$ جتاس + لوهـ جاس × قا^{٢}س

= ١ + قا^{٢}س لوهـ جاس   **بضرب الطرفين × ص = [جاس]^{طاس}**

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = [جاس]^{طاس}(١ + قا^{٢}س لوهـ جاس)

حاول أن تحل

(٨) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي

(أ) ص = س^{٢س} (ب) ص = (جاس)^{س} (جـ) ص^٢ = ٣^{س} × ٢^{ص}

مثال

(٩) تحقيق علاقة: إذا كانت ص = هـ$^{-س}$ $\sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$ حيث -١ < س < ١ أثبت أن: (١ - س^٢) ص$'$ = س^٢ ص

الحل

∵ ص = هـ$^{-س}$ $\sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$ **بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ**

∴ لوهـ ص = لوهـ هـ$^{-س}$ + $\frac{١}{٢}$ لوهـ $\frac{١ + س}{١ - س}$

لوهـ ص = -س + $\frac{١}{٢}$[لوهـ (١ + س) - لوهـ (١ - س)]

بتفاضل طرفي العلاقة بالنسبة إلى س

$\frac{١}{ص} \times$ ص$' = -١ + \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{١ + س} - \frac{-١}{١ - س}\right]$

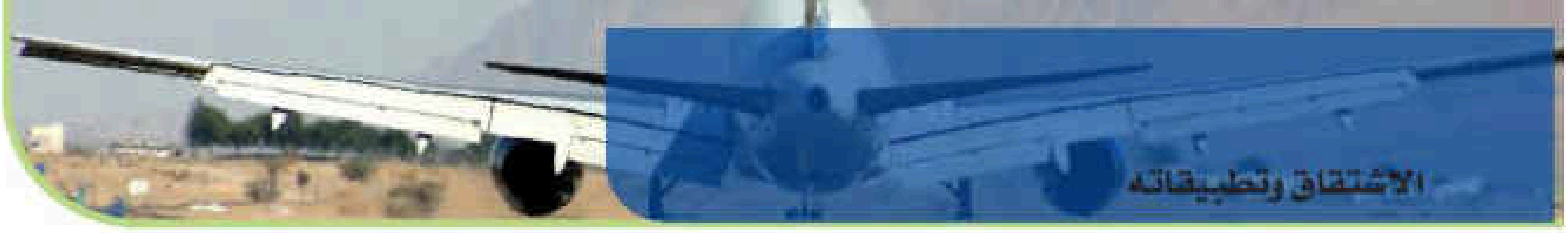
$\frac{ص'}{ص} = -١ + \frac{١}{٢}\left[\frac{١ - س + ١ + س}{١ - س^٢}\right]$

$\frac{ص'}{ص} = -١ + \frac{١}{١ - س^٢} = \frac{-١ + س^٢ + ١}{١ - س^٢}$

$\frac{ص'}{ص} = \frac{س^٢}{١ - س^٢}$ ∴ (١ - س^٢) ص$'$ = س^٢ ص

حاول أن تحل

(٩) إذا كانت ص = أهـ$^{\frac{ب}{س}}$ اثبت أن: س ص ص$''$ + ٢ ص ص$'$ - س ص$'^٢$ = ٠



تمارين ١ - ٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت $د(س) = هـ^{٣س}$ فإن $د'(س)$ تساوي:

أ) $هـ^{٣س}$ ب) $٣هـ^{٣س}$ ج) $٩هـ^{٣س}$ د) $٣هـ^{٢س}$

(٢) إذا كان $د(س) = أهـ^{س}$ فإن $د'(-٢)$ تساوي:

أ) $-د(٢)$ ب) $-د'(٢)$ ج) $-د(-٢)$ د) $د(-٢)$

(٣) منحنى الدالة د: $د(س) = ١ + لو_{هـ} (س - ٢)$ هو نفس منحنى الدالة ر: $ر(س) = لو_{هـ} س$ بالانتقال:

أ) (١ ، ٢) ب) (١ ، -٢) ج) (-٢ ، ١) د) (٢ ، ١)

(٤) النسبة بين ميل مماس المنحنى $ص = لو_{هـ} ٣\sqrt{س + ١}$ وميل مماس المنحنى $ص = لو_{هـ} ٥\sqrt{س + ١}$ عند س = ١ كنسبة

أ) ٣ : ٥ ب) ٥ : ٣ ج) ١ : ١ د) $لو_{هـ} ٣ : لو_{هـ} ٥$

أوجد المشتقة الأولى لكل من:

(٥) $ص = هـ^{٣س^{٥}}$

(٦) $ص = هـ^{س^{٢} - س}$

(٧) $ص = (٣^{س - ١})^{-٢}$

(٨) $ص^{٢} = هـ^{٥س^{٢} - ٣}$

(٩) $ص = لو_{هـ} (٢س - ٧)$

(١٠) $ص = لو_{هـ} (\frac{١}{٢}س^{٢} + س)$

(١١) $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٢}}{س + ٧}$

(١٢) $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$

(١٣) $ص = لو_{٢} (٤س + ٩)^{٢}$

(١٤) $ص = \frac{هـ^{٣س}}{لوس}$

(١٥) $ص = قاهـ^{س}$

(١٦) $ص = ٢هـ^{٣س} - ٥ لو_{٢} \frac{س}{٥}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة:

(١٧) $ص = \sqrt{س} - ٢هـ^{س}$ ، $س = \frac{١}{٤}$

(١٨) $ص = س^{٢} - ٣لو_{هـ} س$ ، $س = ٢$

(١٩) $ص = \frac{١}{٤} هـ^{٢س} - ٢لو_{هـ} س$ ، $س = \frac{١}{٢}$

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى:

(٢٠) $\text{ص هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{٣}$ (٢١) $\text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = ٥٨$ (٢٢) $\text{ص} = \text{س}^{\text{جاس}}$

(٢٣) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$ (٢٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$ (٢٥) $\text{ص} = \text{س}^{\frac{١}{\text{س}}}$

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ لكل مما يأتى:

(٢٦) $\text{س} = \text{هـ}^{٢\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٣}$

(٢٧) $\text{س} = ٦\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^{٢}$

أجب عن كل ما يأتى:

(٢٨) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{١}$ فأوجد $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ عند $\text{س} = ٤$

(٢٩) إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - ١}}$ أثبت أن $(\text{س}^{٤} - ١)\text{ص}' + ٢\text{س ص} = ٠$

(٣٠) أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى $\text{ص} = ٩\text{س}^{٣} - ٨\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ موازيًا لمحور السينات.

(٣١) أوجد معادلة العمودى للمنحنى $\text{ص} = ٣\text{هـ}^{-\text{س}}$ عند نقطة واقعه عليه و إحداثيها السينى يساوى -١

١ - ٤

المعدلات الزمنية المرتبطة

Related Time Rates

سوف تتعلم

- مفهوم المعدلات الزمنية المرتبطة
- طرق حل معادلات المعدلات الزمنية المرتبطة
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية

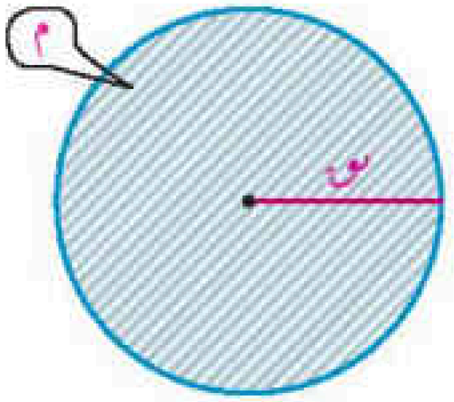
المصطلحات الأساسية

- معدل Rate
- معدلات مرتبطة Related Rates

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

فكر و ناقش



عند تعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى زمنًا قدره (ن) ثانية

- هل يتغير طول نصف قطرها (نق) بتغير الزمن (ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير الزمن(ن)؟
- هل تتغير مساحة سطح الصفيحة (م) بتغير طول نصف قطرها (نق) ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن :

١ - المتغيرين م ، نق كلاهما يتغير بتغير الزمن (دالة فى الزمن) وتربطهما العلاقة $م = \pi نق^{2}$ أى أن : م = د(نق)

٢ - اشتقاق طرفى العلاقة السابقة بالنسبة للزمن يؤدى إلى معادلة جديدة تربط بين المعدل الزمنى لتغير كل منهما وتعرف بمعادلة المعدلات المرتبطة

حيث : $\frac{ءم}{ءن} = د'(نق) \times \frac{ءنق}{ءن}$

٣ - المعدل الزمنى يكون موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن، ويكون سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تعبير شفهى : أى المعدلات التالية يكون موجبًا؟

(تمدد - انكماش - اقتراب - تباعد - صب - تسرب - انصهار - تراكم - تناقص - تزايد)

مثال نفخ البالون

١) بالون كُرى عند ملئه بالغاز كان معدل الزيادة فى حجمه 8π سم^{3}/ث عندما كان طول نصف القطر ٤سم . أوجد فى هذه اللحظة:

أ) معدل زيادة طول نصف القطر.

ب) معدل الزيادة فى المساحة السطحية.

الحل

بفرض أن حجم البالون (ح) وطول نصف القطر (نق) ، ومساحة سطح البالون (م) دوال قابلة للاشتقاق فى ن.

تحديد المتغيرات وتسميتها
↓
رسم تخطيطى للمدخلات
↓
إيجاد علاقة الارتباط
↓
اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن
↓
التعويض عن القيم لإيجاد المعدل المطلوب

(أ) $ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$$\frac{ءح}{ءن} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣نق^{٢}\frac{ءنق}{ءن} = ٤\pi نق^{٢}\frac{ءنق}{ءن} \quad (١)$$

∵ $\frac{ءح}{ءن} = ٨\pi$ سم^{٣}/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

∴ $٨\pi = ٤\pi(٤)^{٢}\frac{ءنق}{ءن}$ أى $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٨}$ سم/ث

(ب) $م = ٤\pi نق^{٢}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$$\frac{ءم}{ءن} = ٤\pi \times ٢نق\frac{ءنق}{ءن} = ٨\pi نق\frac{ءنق}{ءن} \quad (٢)$$

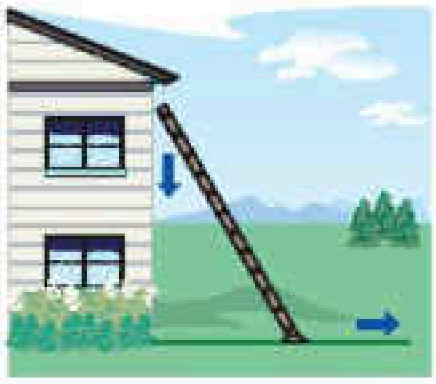
∵ $\frac{ءنق}{ءن} = \frac{١}{٨}$ سم/ث ، نق = ٤سم بالتعويض فى المعادلة

∴ $\frac{ءم}{ءن} = ٨\pi \times ٤ \times \frac{١}{٨} = ٤\pi$ سم^{٢}/ث

حاول أن تحل

(١) الحجم: مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د، وتزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم^{٢}/د، أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة ومعدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

مثال حركة السلم

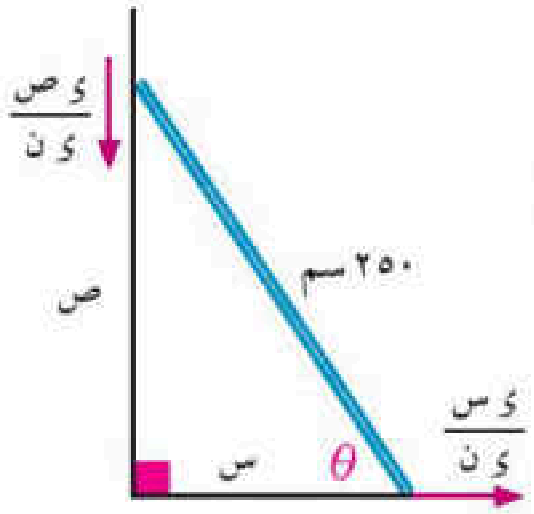


(٢) يستند سلم طوله ٢٥٠سم على حائط رأسى، فإذا انزلق الطرف العلوى للسلم إلى أسفل الحائط بمعدل ١٠سم/ث عندما يكون الطرف السفلى للسلم على بعد ٧٠سم من الحائط . أوجد:

(أ) معدل انزلاق الطرف السفلى للسلم.

(ب) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض.

الحل



(أ) نفرض أن : ص المسافة بين الطرف العلوى للسلم والأرض،

س المسافة بين الطرف السفلى للسلم والحائط الرأسى.

من نظرية فيثاغورث $س^{٢} + ص^{٢} = (٢٥٠)^{٢}$ (١)

باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$٢س\frac{ءس}{ءن} + ٢ص\frac{ءص}{ءن} = ٠$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = -\frac{ص}{س}\frac{ءص}{ءن}$ (٢)

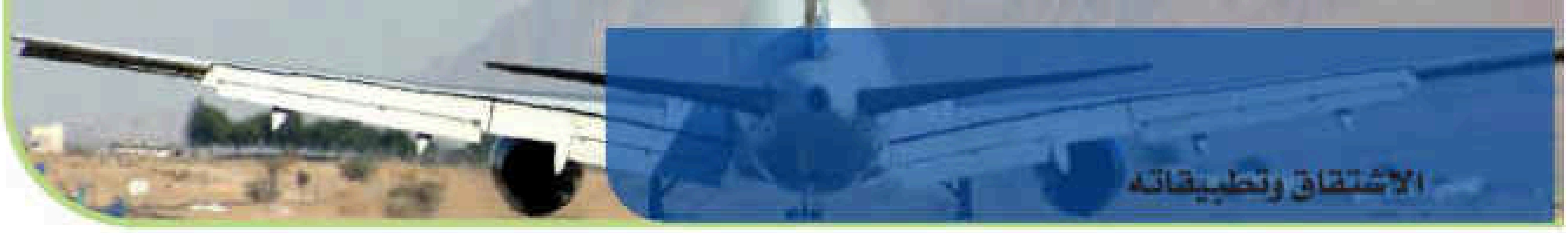
∵ الطرف العلوى ينزلق أسفل الحائط فإن ص تتناقص

∴ $\frac{ءص}{ءن} = -١٠$ سم/ث

عند س = ٧٠ سم ومن المعادلة (١) نجد أن: ص = ٢٤٠ سم

بالتعويض فى المعادلة (٢) ينتج أن: $\frac{ءس}{ءن} = -\frac{٢٤٠}{٧٠} \times -١٠ = \frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث

أى إن الطرف السفلى للسلم ينزلق مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{٢٤٠}{٧}$ سم/ث



(ب) نفرض أن : θ قياس زاوية ميل السلم على الأرض

جا $\theta = \frac{ص}{٢٥٠}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

$\therefore$ جتا $\theta \frac{ءθ}{ءن} = \frac{١}{٢٥٠} \frac{ءص}{ءن}$ لكن $\frac{ءص}{ءن} = -١٠$ /ث عند س = ٧٠ سم

$\frac{٧٠}{٢٥٠} \times \frac{ءθ}{ءن} = \frac{١}{٢٥٠} \times -١٠$ $\therefore \frac{ءθ}{ءن} = -\frac{١}{٧}$ ء/ث

أى إن قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧}$ زاوية نصف قطريه /ث

حاول أن تحل

(٢) حركة سلم: يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى . إذا انزلق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى $\frac{\pi}{٣}$

تفكير ناقد: انطلق صاروخ كتلته ١٥ طنًا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت ٢٠٠ كجم/ث، ما كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه؟

ملاحظة مهمة: إذا كانت $س_٠$ القيمة الابتدائية للمتغير س (عند ن = ٠) ، $\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ثابت ، س قيمة المتغير بعد زمن ن **فإن :** $س = س_٠ + \frac{ءك}{ءن} \times ن$

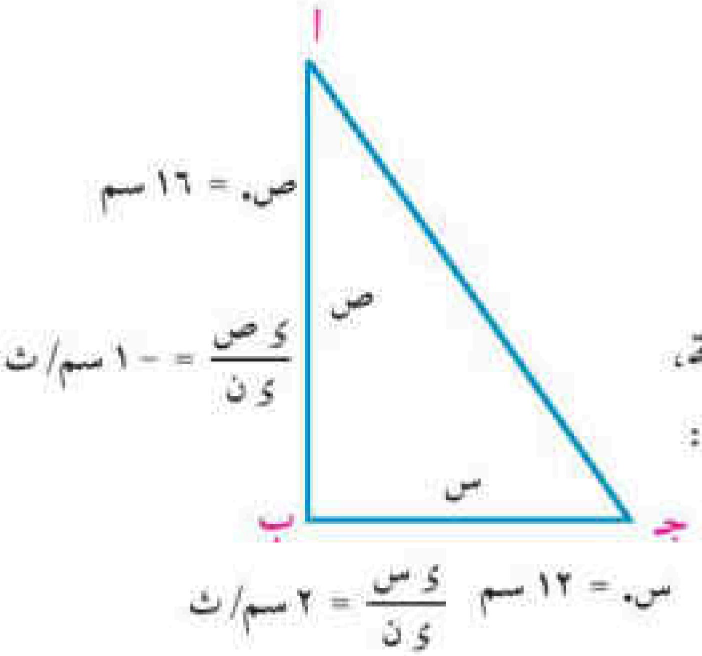
فى بند تفكير ناقد السابق استخدم العلاقة $ك = ك_٠ + \frac{ءك}{ءن} \times ن$ لتتحقق من صحة إجابتك.

مثال المساحة

(٣) مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة ١٢سم ، ١٦سم، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل ٢ سم/ث وكان طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم/ث.

(أ) أوجد معدل تغير مساحة المثلث بعد ٢ ث

(ب) متى يصبح هذا المثلث مثلثًا متساوى الساقين؟



الحل

(أ) نفرض أن س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد زمن قدره ن ثانية،

م مساحة المثلث حينئذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن:

$\therefore$ س = ١٢ + ٢ ن ، ص = ١٦ - ن

م = $\frac{١}{٢}$ س × ص = $\frac{١}{٢}$ (١٢ + ٢ ن) (١٦ - ن)

م = (٦ + ن) (١٦ - ن) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{ءم}{ءن}$ = (٦ + ن) × -١ + (١٦ - ن) = ١٠ - ٢ ن سم^٢/ث

عند ن = ٢ ث $\therefore$ معدل تغير مساحة المثلث = ١٠ - ٢ (٢) = ٦ سم^٢/ث

(ب) عندما س = ص يكون ١٢ + ن = ١٦ - ن ∴ ن = $\frac{٤}{٣}$ ث

أى أن بعد $\frac{٤}{٣}$ ث يصبح المثلث القائم مثلثًا متساوى الساقين

حاول أن تحل

(٣) **الحجم:** جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د . أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥سم وارتفاعه ٢٠سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة.

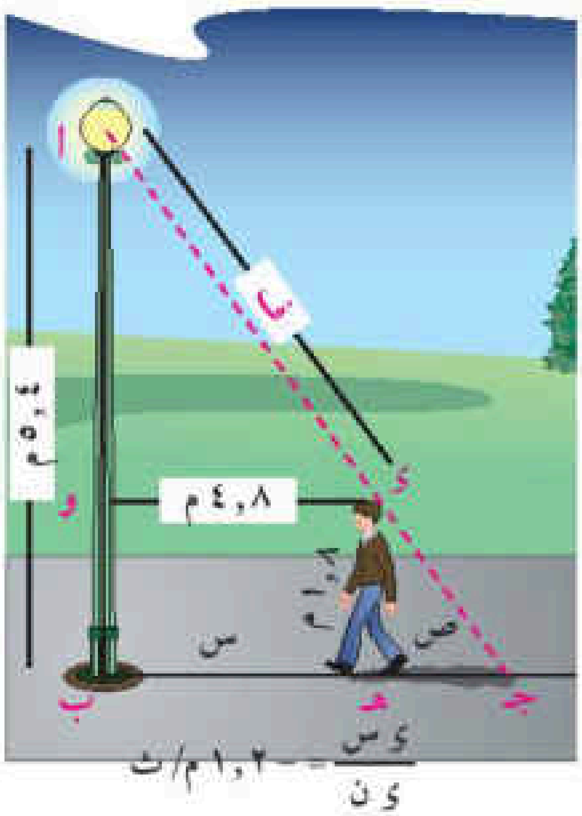
مثال طول الظل

(٤) يسير رجل طوله ١,٨ متر فى خط مستقيم مقتربًا من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ١,٢ متر/ث، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٥,٤ مترًا عن سطح الأرض أوجد:

(أ) معدل تغير طول ظل الرجل.

(ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤,٨ مترًا من عمود الإضاءة.

الحل



نمذجة المشكلة: فى الشكل المقابل تمثل $\overline{اب}$ عمود الإضاءة، النقطة ا المصباح وتمثل $\overline{ءهـ}$ الرجل، والنقطة جـ نهاية ظل الرجل فيكون:

س = هـ ب بعد الرجل عن قاعدة عمود الإضاءة.

ص = هـ جـ طول ظل الرجل.

ف = ا ء بُعد رأس الرجل عن المصباح.

أولًا: ∵ △ ا ب جـ ~ △ ء هـ جـ

∴ $\frac{اب}{ءهـ} = \frac{ب جـ}{هـ جـ} = \frac{٥,٤}{١,٨} = \frac{س + ص}{ص}$

ويكون ٢ ص = س باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

∴ ٢ $\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{ء س}{ء ن}$ أى $\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{-١,٢}{٢}$ = -٠,٦ متر/ث

ثانيًا: فى △ ا ء و القائم الزاوية فى (و)

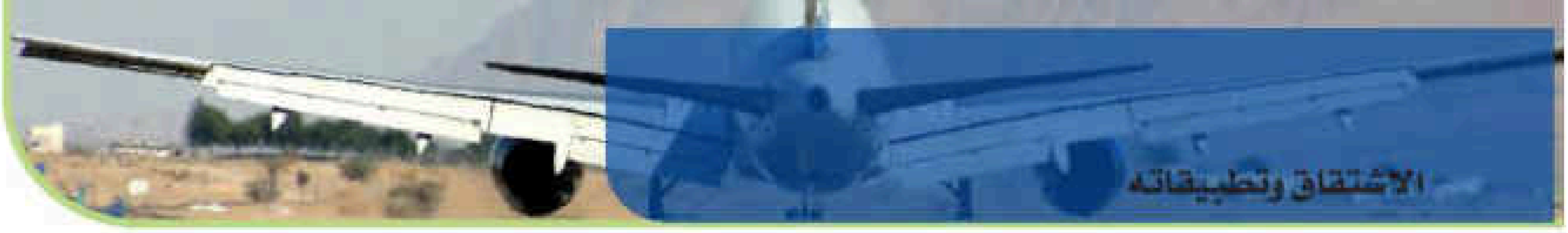
ف^٢ = س^٢ + (٣,٦)^٢ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

٢ ف $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٢ س $\frac{ء س}{ء ن}$ عند س = ٤,٨ م ف = ٦ متر

٦ $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٤,٨ × -١,٢ أى $\frac{ء ف}{ء ن}$ = -٠,٩٦ متر/ث

حاول أن تحل

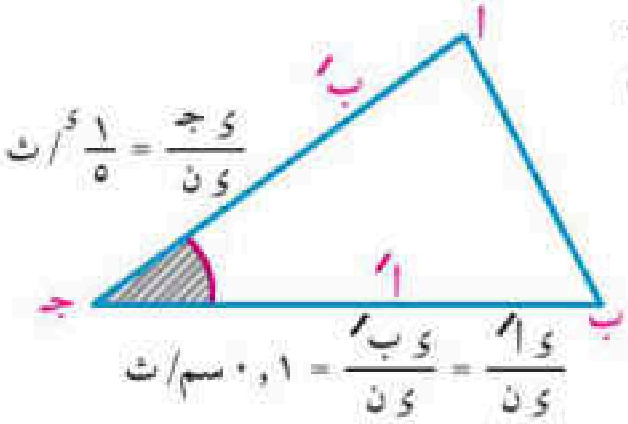
(٤) **انشاءات:** ماسورة مياه طرفاها ا ، ب ، وطولها ٥ أمتار، تستند بطرفها ا على أرض أفقية وبإحدى نقطها ء على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف ا مبتعدًا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور.



مثال — المساحة

(٥) ضلعان فى مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل ٠,١سم/ث ، و يتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{١}{٥}$ ء/ث. بأى معدل تتغير مساحة المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم.

الحل



نمذجة المشكلة: نفرض أن عند لحظة زمنية ن يكون طول أحد ضلعى المثلث أ٬ وطول الآخر ب٬ وقياس الزاوية المحصورة بينهما جـ ء ، م مساحة المثلث ا ب جـ دوال قابلة للاشتقاق فى ن

حيث م = $\frac{١}{٢}$ أ٬ ب٬ جا جـ   باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢}$ أ٬ ب٬ $\frac{ء}{ءن}$[جا جـ] + $\frac{١}{٢}$ جا جـ $\frac{ء}{ءن}$[أ٬ب٬]

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢}$ أ٬ ب٬ جتا جـ $\frac{ءجـ}{ءن}$ + $\frac{١}{٢}$ جا جـ[أ٬ $\frac{ءب٬}{ءن}$ + ب٬ $\frac{ءأ٬}{ءن}$]   (١)

لكن $\frac{ءأ٬}{ءن} = \frac{ءب٬}{ءن} = ٠,١$ ، $\frac{ءجـ}{ءن} = \frac{١}{٥}$

وعندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث ١٠سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

فإن ق(∠ جـ) = $\frac{\pi}{٣}$ ، جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ $\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢} × ١٠ × ١٠ × \frac{١}{٢} × \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢} × \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [٢ × ١٠ × $\frac{١}{١٠}$]

= ٥ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥,٨٦٦ سم²/ث

أى مساحة المثلث تتزايد عند هذه اللحظة بمعدل ٥,٨٦٦ سم²/ث

حاول أن تحل

(٥) __المساحة:__ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤سم²، إذا كان معدل تغير ب٬ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أ٬ ، ق (∠ا) عند اللحظة التى يكون فيها ب٬ يساوى ٨ سم.

__تفكير ناقد:__ إذا كان س (قياس زاوية بالتقدير الدائرى) يتزايد بمعدل زمنى ثابت، فسر لماذا:

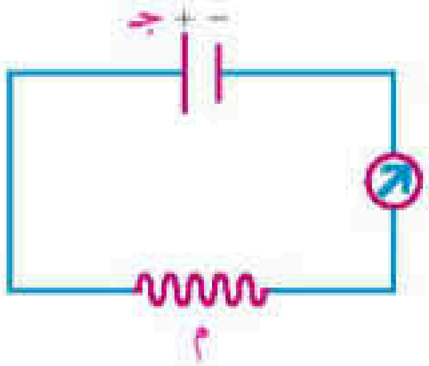
(أ) يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل   عند س = ٠

(ب) يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب   عند س = $\frac{\pi}{٣}$

(جـ) يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{٣}{٨}$ مرة قدر تزايد الظل   عند س = $\frac{\pi}{٦}$

مثال — الربط بالفيزياء

(٦) فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كان جـ فرق الجهد (ڤولت) ، ت شدة التيار (أمبير)، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ ڤولت/ ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير.



الحل

تعلم أن جـ = ت × م   باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = \text{ت} \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} + \text{م} \frac{\text{ءت}}{\text{ءن}}$

$\because \frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = ١$ ڤولت / ث ، $\frac{\text{ءت}}{\text{ءن}} = -\frac{١}{٢}$ أمبير /ث

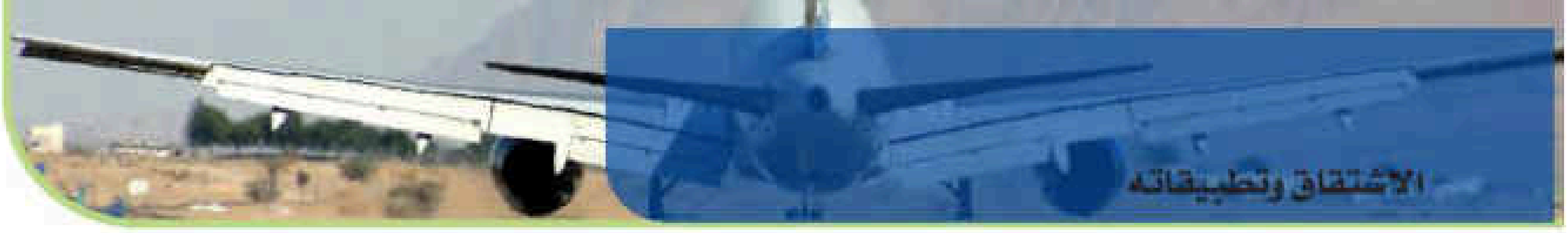
$\therefore$ عند جـ = ١٢ ڤولت ، ت = ٢ أمبير **فإن :** م = $\frac{\text{جـ}}{\text{ت}} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أوم

ويكون ١ = ٢ × $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ + ٦ × $-\frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٢$ أوم /ث

أى إن معدل تغير المقاومة فى هذه اللحظة ٢ أوم /ث

حاول أن تحل

٦ فى المثال السابق احسب معدل تغير المقاومة إذا كان التيار يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ أمبير / ث.



تمـــارين الدرس (١ - ٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

أ) $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث ب) $\frac{\pi}{٤}$ سم/ث ج) $\frac{١}{٨}$ سم/ث د) ٨ سم/ث

٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} هو: .... سم / ث

أ) $-\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{١٢}$ ج) $-\frac{١}{٦}$ د) $\frac{١}{٦}$

٣) جسم يتحرك على المنحنى ص^{٢} = س^{٣}، إذا كان $\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = - ١ فإن $\frac{د ص}{د ن}$ عند هذه اللحظة يساوى .... وحدة / ث

أ) $-\frac{٣}{٤}$ ب) $-\frac{٣}{٨}$ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٢}$

٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى .... وحدة / ث

أ) $-\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{٣}{٢}$

أجب عما يأتى:

٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٨ ص - ٦ = ٠ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣، ١) يساوى ٤ وحدات / ث، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ن.

٦) سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوانٍ.

٧) صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠سم.

٨) كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢سم^{٣}/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسيًا مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم /سم^{٢} عندما يكون الحجم ٢٥٠سم^{٣}. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠سم^{٣}.

٩) يتسرب غاز من بالون كرى بمعدل ٢٠سم^{٣}/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠سم، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى نفس اللحظة.

(١٠) سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى و بطرفه السفلى على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ سم/د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة.

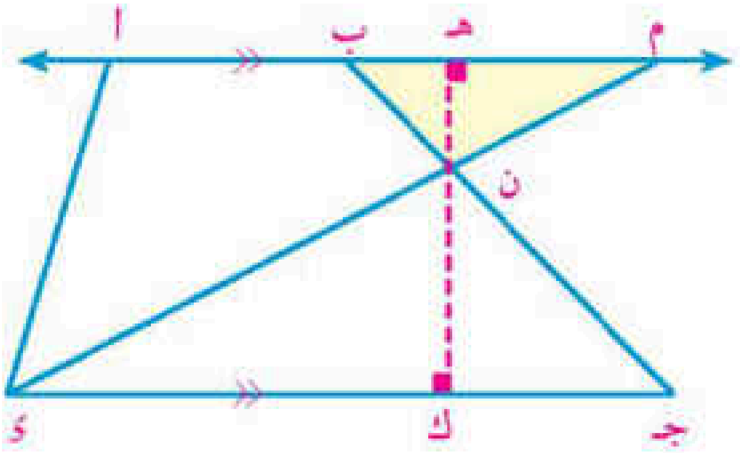
(١١) يرتفع بالون رأسيًا لأعلى من نقطة ا على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة ا وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠,١٢ ء / د ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة.

(١٢) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعدًا عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. و إذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θء عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س مترًا فأثبت أن س = $\frac{٦}{٥}$ ظتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح.

(١٣) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$. إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساويًا لطول القاعدة.

(١٤) الربط بالصناعة: إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يومًا) يتعين بالعلاقة ص = ٤٠٠ (١ - هـ$^{-٠,٣ن}$) وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجه بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر.

(١٥) تطبيقات حياتية: إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطَى بالعلاقة: ص = (ن + ١٠٠) لو (ن + ٥) جرام بدلالة عدد الأيام ن. أوجد معدل تغير انتاج الخلية عند ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠. هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص؟



(١٦) ا ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{ءجـ}$ // $\overline{اب}$، إرتفاعه يساوي ٣ سم، ءجـ = ٥ سم، تتحرك النقطة م على الشعاع $\overrightarrow{اب}$ بسرعة ٤,٨سم/ث مبتدأ من النقطة ب. أوجد معدل تغير مساحة المثلث م ن ب في اللحظة التي يكون فيها م ب = ١سم

الوحدة الثانية

سلوك الدالة ودراسة المنحنيات

Behavior of the Function and Investigating curves

مقدمة الوحدة

يمكنك من خلال قراءة الشكل البياني لمنحنى دالة أن تحدد فترات اطراد (تزايد - تناقص- ثبات) كما يمكن معرفة القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة والتعرف على بعض خواص الدالة، كما تستطيع باستخدام البرامج الرسومية للحاسب الآلى رسم الدالة ودراسة سلوكها... إلا أن هذا ليس متاحًا دائما، لذلك ستعرف فى هذه الوحدة تقنيات أكبر لرسم منحنى الدالة من خلال حساب التفاضل باستخدام مشتقات الدالة (المشتقة الأولى والمشتقة الثانية) لتحديد فترات تزايد أو تناقص الدالة، وتعيين القيم العظمى والقيم الصغرى المرتبطة بقيم س (القيم العظمى والصغرى المحلية)، والقيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة متصلة على فترة محددة [أ ، ب] واتجاه تحدب منحنى الدالة (لأعلى أو لأسفل) كما تدرس بعض التطبيقات لإيجاد القيم العظمى والصغرى لتساعدك فى نمذجة وحل مشكلات رياضية وفيزيائية وحياتية أخرى.

مخرجات التعلم

فى نهاية هذه الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يستخدم المشتقة الأولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة القابلة للاشتقاق.
- يحدد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة القابلة للاشتقاق.
- يتعرف ويوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة.
- يوجد النقط الحرجة والتحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب لدالة.
- يوجد العلاقة بين منحنى الدالة والمشتقة الأولى.
- يدرس سلوك دالة من حيث اطراد والقيم العظمى والصغرى من خلال المشتقة الأولى.
- يدرس منحنيات الدالة ومشتقاتها.

المصطلحات الأساسية

دالة متزايدة	Increasing Function	قيمة صغرى محلية	Local Minimum	التحدب	Convexity
دالة متناقصة	Dereasing Functicn	قيمة عظمى محلية	Local Maximum	تحدب لأعلى	Convex Upward
القيم العظمى والصغرى	Maxima and Minima	قيمة قصوى محلية	Local Extrema	تحدب لأسفل	Convex Downward
القيم القصوى	Extrema	قيمة قصوى مطلقة	Absolute Extrema	نقطة انقلاب	Inflection Point
نقطة حرجة	Critical Point				

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): تزايد وتناقص الدوال.

الدرس (٢ - ٢): القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

الدرس (٢ - ٣): دراسة المنحنيات

الدرس (٢ - ٤): تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلي

مخطط تنظيمي للوحدة

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم

- استخدام المشتقة الأولى فى تحديد فترات تزايد أو تناقص دالة.
- تطبيقات حياتية على فترات تزايد وتناقص الدالة.

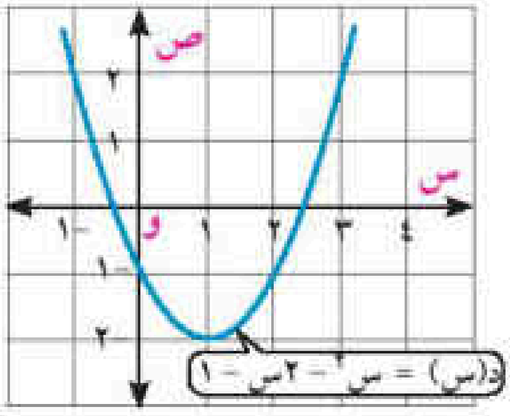
المصطلحات الأساسية

- دالة متزايدة *Increasing Function*
- دالة متناقصة *Decreasing Function*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

فكر و ناقش

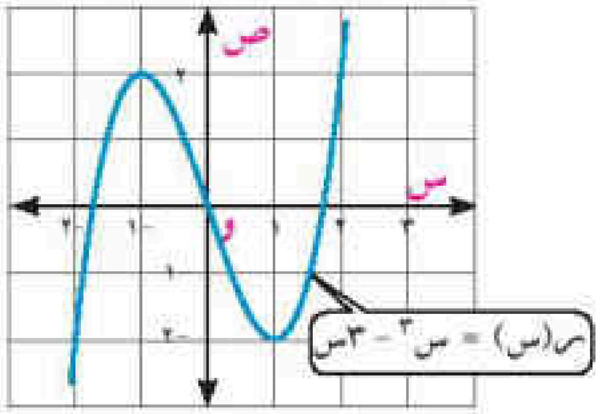


توضح الأشكال المقابلة منحنيى الدالتين د ، ر حيث

د (س) = $س^{٢}$ - ٢س - ١ ،

ر (س) = $س^{٣}$ - ٣س

- حدد فترات تزايد أو تناقص الدالة د
- أوجد مشتقة الدالة د وابحث إشارة د/ (س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التزايد
- إبحث إشارة د/ (س) لقيم س المختلفة التى تنتمى لفترة التناقص



كرر ما سبق من خطوات لتحديد إشارة ر/ (س) فى فترات التزايد وفترات التناقص للدالة ر، ماذا تستنتج؟ وما نوع الزاوية التى يصنعها مماس المنحنى عند قيم س المختلفة فى فترات التزايد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات؟

تعلم

اختبار المشتقة الأولى للدوال المطردة

First Derivative Test for Monotonic Functions

نظرية

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[:

١- اذا كان د/(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[
فإن د متزايدة على الفترة]أ ، ب[

٢- إذا كان د/(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[
فإن د متناقصة على الفترة]أ ، ب[

مثال

تحديد فترات التزايد والتناقص

① حدد فترات التزايد وفترات التناقص الدالة د حيث د (س) = س^{٣} - ٣س + ٢

الحل

∵ د(س) = س^{٣} - ٣س + ٢ دالة متصلة وقابلة للاشتقاق على ع

∴ دَ(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٣ (س^{٢} - ١)

بوضع دَ(س) = ٠ فيكون: ٣ (س^{٢} - ١) = ٣ (س - ١) (س + ١) = ٠

∴ دَ(س) = ٠ عندما س = -١ ، س = ١

نبحث إشارة دَ(س) فى كل من هذه الفترات كما فى جدول التغيرات المقابل فنجد:

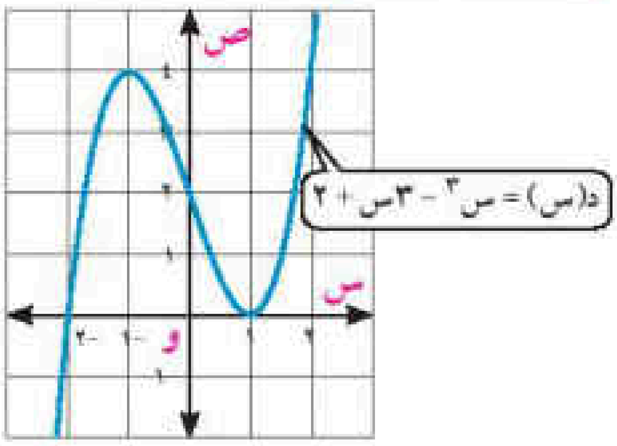
د متزايدة علي الفترة] -∞ ، -١ [

د متناقصة على الفترة] -١ ، ١ [

د متزايدة على الفترة] ١ ، ∞ [

س	-∞	-١		١	∞
إشارة دَ(س)	+	٠	−	٠	+
سلوك د (س)	↗		↘		↗

لاحظ أن:



١) عند رسم منحنى الدالة د بأحد البرامج الرسومية (الشكل المقابل) نجد أن سلوك منحنى الدالة يطابق ما تم استنتاجه بجدول التغيرات.

٢) المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التناقص.

٣) قيم س التى تفصل بين فترات التزايد والتناقص للدالة هى القيم التى تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوى صفرًا أو غير موجودة

حاول أن تحل

① حدد فترات التزايد وفترات التناقص لكل مما يأتى:

(أ) د (س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س

(ب) ر(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

مثال

دوال مثلثية

② حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) = س + ٢جا س ، ٠ < س < ٢π

الحل

د متصلة وقابلة للاشتقاق على] ٠ ، ٢π [

∴ دَ(س) = ١ + ٢ جتا س

بحث إشارة دَ(س)

عندما ١ + ٢ جتاس = ٠ ∴ جتاس = - $\frac{١}{٢}$

∵ س ∈] ٠ ، ٢π [∴ س = $\frac{٢\pi}{٣}$ أو س = $\frac{٤\pi}{٣}$

س	-∞	$\frac{٢\pi}{٣}$		$\frac{٤\pi}{٣}$	∞
إشارة دَ(س)	+	٠	−	٠	+
سلوك د (س)	↗		↘		↗

لاحظ أن:

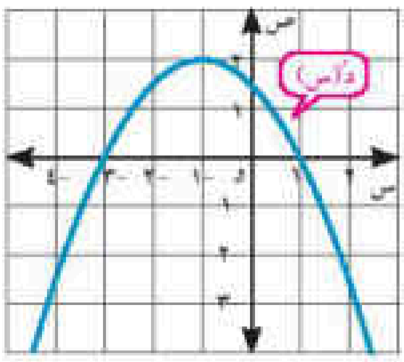
عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، د'(س) = ١ > ٠ ∴ د تزايدية على] ٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ [

عند س = π ، د'(س) = -١ < ٠ ∴ د متناقصة على] $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ [

عند س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ، د'(س) = ١ > ٠ ∴ د تزايدية على] $\frac{٤\pi}{٣}$ ، ٢π [

حاول أن تحل

(٢) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د(س) = س - ٢ جتا س ، ٠ < س < ٢π



تفكير ناقد: يوضح الشكل المقابل منحنى د'(س) للدالة د حيث د (س) كثيرة الحدود.

(أ) عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة د''(س) > ٠

مثال

(٣) حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة ر حيث ر (س) = ٢لو$_{هـ}$ س - س^{٢}

الحل

ر (س) قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح$^{+}$

ر'(س) = $\frac{٢}{س}$ - ٢س = $\frac{٢(١ - س^{٢})}{س}$

بحث إشارة ر'(س)

عندما ر'(س) = ٠ ∴ س = ١ أو س = -١ ∉ ح$^{+}$

عند س < ١ ∴ ر'(س) > ٠ وتكون ر تزايدية على] ٠ ، ١ [

عند س > ١ ∴ ر'(س) < ٠ وتكون ر تناقصية على] ١، ∞[

س	٠	١	∞
إشارة د'(س)	+	٠	−
سلوك د (س)	↗		↘

حاول أن تحل

(٣) حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د حيث د (س) = س - هـ^{س} ، وباستخدام برنامج GeoGebra ارسم منحنى الدالة د وتحقق من إجابتك.

تمـــارين ٢ - ١

حدد فترات تزايد وفترات تناقص الدالة د فى كل مما يأتى:

(١) $د(س) = س^{٢} - ٤س$

(٢) $د(س) = (س-٣)^{٢}$

(٣) $د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$

(٤) $د(س) = ٩س - س^{٣}$

(٥) $د(س) = س^{٤} + ٤س$

(٦) $د(س) = ٢ - ٣(س-٢)^{\frac{١}{٣}}$

(٧) $د(س) = ١ - \frac{١}{س}$

(٨) $د(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$

(٩) $د(س) = \frac{\sqrt{س-١}}{س}$

(١٠) $د(س) = س + لو_{هـ} س$

(١١) $د(س) = ٣ - لو_{هـ} س^{٢}$

(١٢) $د(س) = ٥ - ٢ هـ^{٢س}$

أجب عما يأتى:

(١٣) أثبت أن الدالة د حيث $د(س) = ظا س - س$ متزايدة على الفترة $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

(١٤) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث $د(س) = ١ - جاس$ ، $٠ < س < ٢\pi$

(١٥) إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق ، $د'(س) < ر'(س)$ لكل س ∋ ح ، فأثبت أن الدالة ع حيث $ع(س) = د(س) - ر(س)$ متناقصة لكل س ∋ ح.

٢ - ٢

القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

Maxima and Minima (Extrema)

سوف تتعلم

- مفهوم النقطة الحرجة.
- مفهوم القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة.

المصطلحات الأساسية

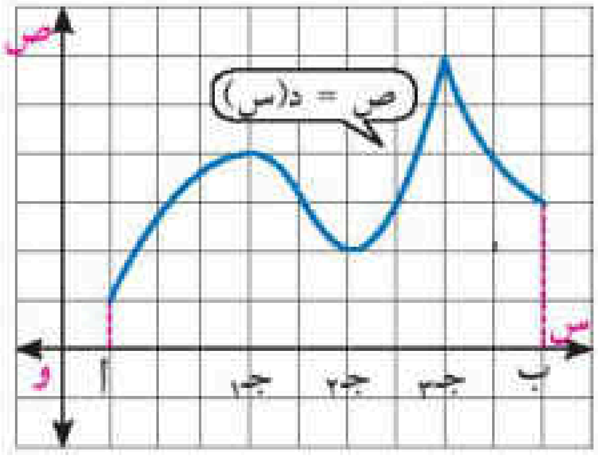
- نقطة حرجة *Critical point*
- قيمة عظمى محلية *Relative Maximum*
- قيمة صغرى محلية *Relative Minimum*
- قيم قصوى مطلقة *Absalute Extrema*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

فكر و ناقش

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د المتصلة على [أ، ب]



١- حدد فترات تزايد وتناقص الدالة د

٢- عند س = جـ١ ما قيمة د′(جـ١)؟ صِفْ تغير د على الفترة]أ ، جـ٢[هل د(جـ١) أكبر قيم د في هذه الفترة؟

٣- عند س = جـ٢ ما قيمة د′(جـ٢)؟ صف تغير د على الفترة]جـ١، جـ٣[، هل د(جـ٢) أصغر قيم د في هذه الفترة؟

٤- هل يمكن إيجاد قيمة د′(جـ٣)؟ فسر إجابتك.

صف تغير د على الفترة]جـ٢، ب[هل د(جـ٣) أكبر قيم د في هذه الفترة؟

تعريف

النقطة الحرجة *Critical Point*

للدالة د المتصلة على الفترة]أ ، ب[نقطة حرجة (جـ ، د(جـ)) إذا كانت جـ ∈]أ ، ب[، د′(جـ) = ٠ أو د′(جـ) غير معرفة أو الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = جـ.

في الشكل السابق نستنتج أن:

توجد نقط حرجة عند س = جـ١ ، س = جـ٢ لأن د′(جـ١) = د′(جـ٢) = ٠ ويطلق عليها أحيانا نقطة التوقف stationary point، كما توجد نقطة أخرى حرجة عند س = جـ٣ لأن د متصلة عند س = جـ٣ وغير قابلة للاشتقاق (المشتقة اليمنى ≠ المشتقة اليسرى).

تعريف

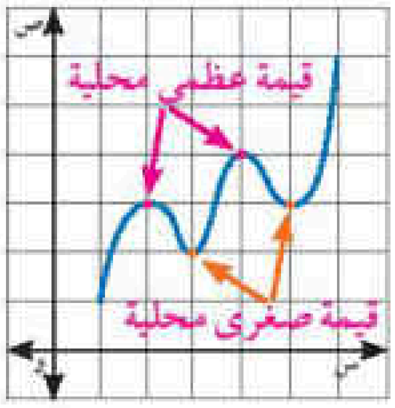
القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية

Local Maximum and Local Minimum

إذا كانت د دالة متصلة، مجالها ف ، جـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د:

قيمة عظمى محلية عند س = جـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوي جـ بحيث يكون د(س) ≤ د(جـ) لكل س ∈]أ ، ب[

قيمة صغرى محلية عند س = جـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوي جـ بحيث يكون د(س) ≥ د(جـ) لكل س ∈]أ ، ب[



لاحظ أن :

فى بند فكر وناقش: توجد قيم عظمى محلية عند س = جـ$_{١}$ ، س = جـ$_{٣}$ ، بينما توجد قيمة صغرى محلية عند س = جـ$_{٢}$

اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية

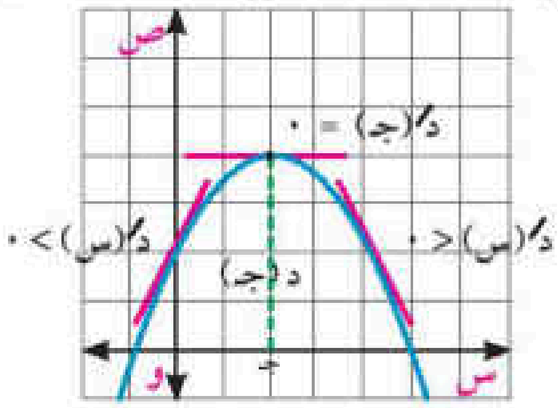
First Derivative Test for relative maximum and relative minimum

تعلم

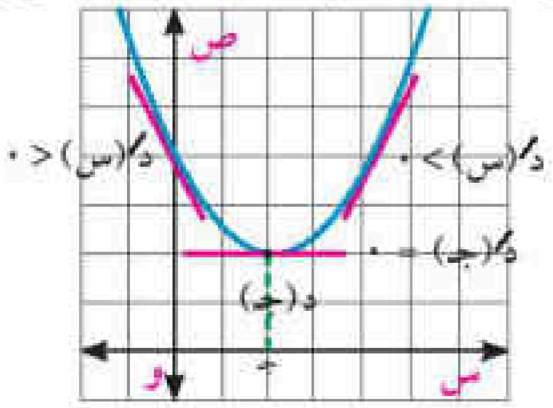
إذا كانت (جـ ، د (جـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند جـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

١- دَ(س) > ٠ عندما س < جـ ، دَ(س) < ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة عظمى محلية

٢- دَ(س) < ٠ عندما س < جـ ، دَ(س) > ٠ عندما س > جـ ، فإن د (جـ) قيمة صغرى محلية



د (جـ) قيمة عظمى محلية عند جـ



د (جـ) قيمة صغرى محلية عند جـ

٣- إذا لم يحدث تغير فى إشارة دَ(س) على جانبى جـ ، فإنه لا يوجد للدالة د فقط عظمى أو صغرى محلية عند جـ.

> **نظرية**
> إذا كانت د دالة متصلة على]أ ، ب[وكانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند جـ ∈]أ ، ب[
> فإن دَ(جـ) = ٠

اختبار المشتقة الأولى

مثال

① إذا كان د (س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س - ٧ أوجد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة د

الحل

١) تحديد النقط الحرجة : د متصلة وقابلة للاشتقاق

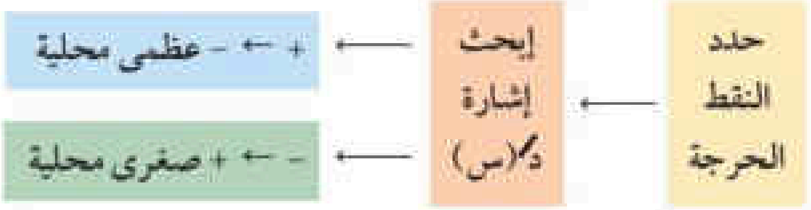
∴ دَ(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٩

= ٣ (س^{٢} + ٢س - ٣) = ٣ (س + ٣) (س - ١)

عندما دَ(س) = ٠ ∴ س = -٣ أو س = ١

لدينا نقطتان حرجتان (-٣ ، د (-٣)) ، (١ ، د (١))

أى النقطتان : (-٣ ، ٢٠) ، (١ ، -١٢)



٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة و يوضحه جدول التغيرات المقابل

س	$-\infty$		-٣		١		∞
إشارة دَ(س)		+	٠	−	٠	+	
سلوك د (س)		↗	٢٠	↘	-١٢	↗	

٣) فى جوار س = -٣ تتغير إشارة دَ(س) من موجبة (قبل س = -٣) إلى سالبة (بعد س = -٣)

∴ د (-٣) = ٢٠ قيمة عظمى محلية.

وفى جوار س = ١ تتغير إشارة دَ(س) من سالبة (قبل س = ١) إلى موجبة (بعد س = ١)

∴ د (١) = -١٢ قيمة صغرى محلية.

حاول أن تحل

(١) إذا كان د (س) = $\frac{1}{3}$ س^{3} - ٩س + ٣ ، أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د

مثال

المشتقة الأولى غير موجودة

(٢) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د إذا كان د (س) = س$^{\frac{2}{3}}$ (٢س - ٥)

الحل

الدالة د مجالها ع ومتصلة لكل س ∈ ع

١) تحديد النقط الحرجة:

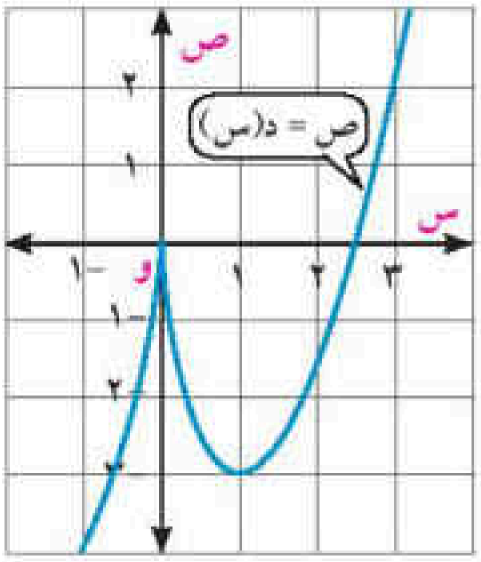
دَ(س) = $\frac{2}{3}$ س$^{-\frac{1}{3}}$ (٢س - ٥) + ٢س$^{\frac{2}{3}}$

= $\frac{٢[٢س - ٥ + ٣س]}{٣\sqrt[3]{س}}$ = $\frac{١٠(س - ١)}{٣\sqrt[3]{س}}$ ، حيث س ≠ ٠

∵ د متصلة عند س = ٠ ، دَ(٠) غير موجودة

∴ توجد نقطة حرجة هى (٠ ، د (٠)) أى (٠ ، ٠)

عندما دَ(س) = ٠ ∴ س = ١ و يوجد عندئذ نقطة حرجة هى (١ ، د(١)) أى (١ ، -٣) كما يوضحها الشكل المقابل .



٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل.

س	$-\infty$		صفر		١		∞
إشارة دَ(س)		+	غير موجودة	−	٠	+	
سلوك د (س)		↗	-	↘	-٣	↗	

٣) عند س = ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ٠

عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية = -٣

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن للدالة د حيث د (س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ قيمة صغرى محلية.

تفكير ناقد: هل للدالة د حيث د (س) = س^{3} + ٣س - ٤ قيم عظمى وصغرى محلية؟ فسر إجابتك.

مثال

دوال كسرية

③ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = س + $\frac{٤}{س}$ مبينًا نوعها

الحل

مجال د = ح - {٠}

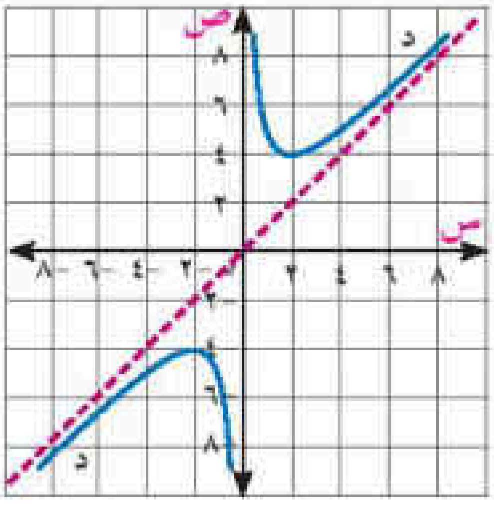
١) تحديد النقط الحرجة: د/(س) = ١ - ٤س$^{-٢}$ = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢}$ للدالة نقطتان حرجتان هما (٢، د(٢)) ، (-٢، د (-٢)) أى (٢ ، ٤) ، (-٢ ، -٤).

٢) اختبار المشتقة الأولى عند كل نقطة حرجة يوضحه جدول تغيرات الدالة المقابل (لاحظ استبعاد س = ٠ من مجال د).

س	∞-		٢-		٠		٢		∞
إشارة د/(س)		+		−	‖	−		+	
سلوك د (س)		↗	٤-	↘	‖	↘	٤	↗	

٣) عند س = -٢ توجد قيمة عظمى محلية = -٤

وعند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية = ٤



لاحظ أن: قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

تكنولوجيا: يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د باستخدام أحد البرامج الرسومية، قارن بين جدول تغيرات الدالة ومنحناها . ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

③ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = $\frac{س^٢}{١ - س}$ مبينًا نوعها

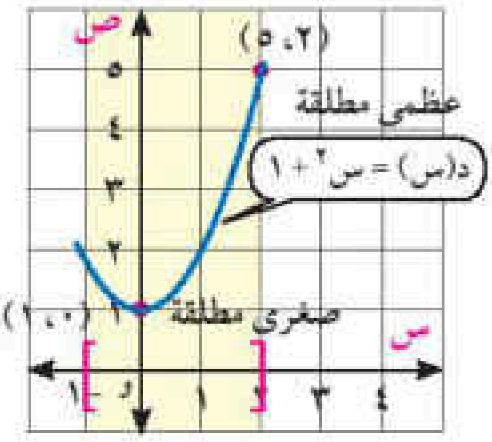
تعلم

القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة *The Absalute Extrema of a Function on a Closed Interval*

تعريف القيم القصوى : إذا كانت د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت جـ ∈ [أ ، ب]

١) د (جـ) هى قيمة صغرى على الفترة [أ ،ب] عندما يكون د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

٢) د (جـ) هى قيمة عظمى على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈ [أ ، ب]



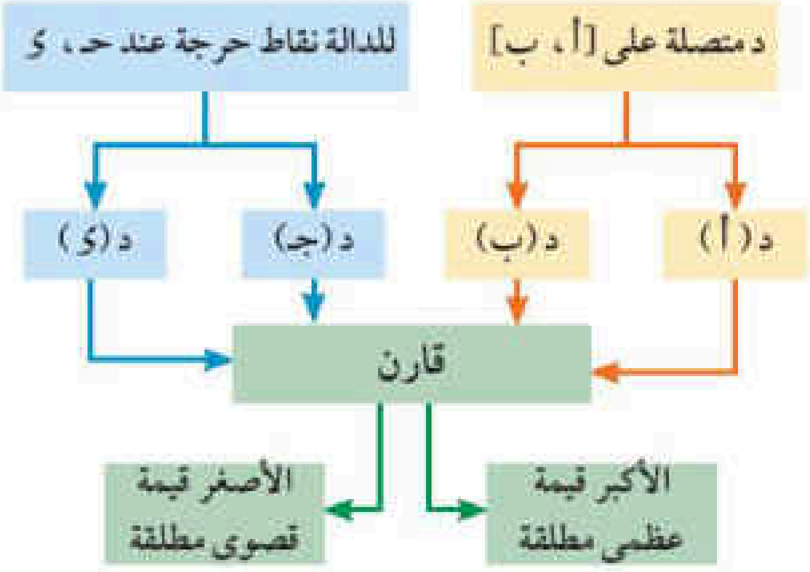
- القيمة الصغرى والقيمة العظمى لدالة على فترة تسمى القيم القصوى للدالة على هذه الفترة .
- القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أى نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وعندما تحدث عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى

نظرية

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب].

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المغلقة [أ ، ب] نتبع المخطط المقابل كما يلي:

- احسب د (أ) ، د (ب) ، وقيمة الدالة عند كل نقطة حرجة.
- قارن بين القيم السابقة: أكبر هذه القيم هو قيمة عظمى مطلقة وأصغرها هو قيمة صغرى مطلقة.



مثال

٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د (س) = س^{٣} - ١٢ س + ١٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل

∵ د (س) = س^{٣} - ١٢ س + ١٢ ، س ∈ [-٣ ، ٣]

∴ د (-٣) = (-٣)^{٣} - ١٢(-٣) + ١٢ = ٢١ (١)

، د (٣) = (٣)^{٣} - ١٢(٣) + ١٢ = ٣ (٢)

دَ(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ = ٣ (س - ٢) (س - ٢)

لتحديد النقط الحرجة نضع دَ(س) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [-٣ ، ٣] أو س = -٢ ∈ [-٣ ، ٣]

عند س = ٢ توجد نقطة حرجة ويكون: د (٢) = -٤ (٣)

عند س = -٢ توجد نقطة حرجة ويكون: د (-٢) = ٢٨ (٤)

بمقارنة قيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن:

للدالة د قيمة عظمى مطلقة = ٢٨ ، قيمة صغرى مطلقة = -٤

حاول أن تحل

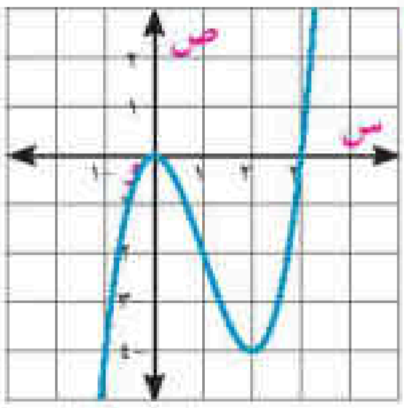
٤ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د

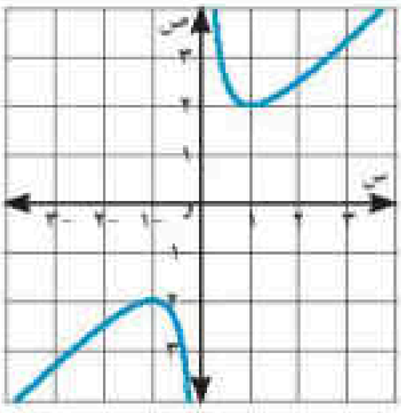
(أ) د (س) = ١٠ س هـ$^{-س}$ س ∈ [٠ ، ٤]

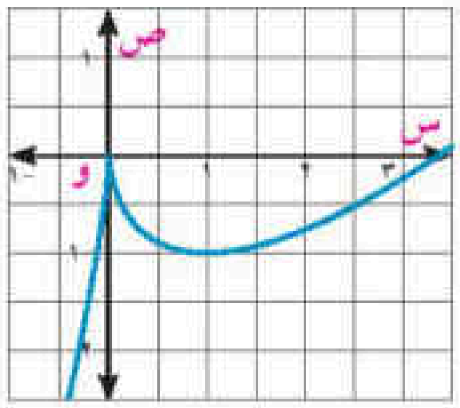
(ب) د (س) = $\frac{٤س}{س^{٢} + ١}$ س ∈ [-١ ، ٣]

تمارين ٢ - ٢

حدد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى الأشكال التالية وبين نوعها:

(١) 

(٢) 

(٣) 

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د فى كل مما يأتى مبينًا نوعها:

(٤) د (س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

(٥) د (س) = س^{٤} - ٢س^{٢}

(٦) د (س) = ٤س - س^{٣}

(٧) د (س) = ٣س^{٥} - ٥س^{٣}

(٨) د (س) = ٣ - س$^{\frac{٤}{٣}}$

(٩) د (س) = (س + ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$

(١٠) د (س) = س + $\frac{٤}{س^{٢}}$

(١١) د (س) = س + $\frac{٤}{س - ١}$

(١٢) د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

(١٣) د (س) = ٤ هـ$^{-س^{٢}}$

(١٤) د (س) = هـ^{س} (٣ - س)

(١٥) د (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$

(١٦) د (س) = س - لو$_{هـ}$ س

(١٧) د (س) = ٨لو$_{هـ}$ س - س^{٢}

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة:

(١٨) د (س) = س^{٣} - ٣س + ١ ، س ∈ [-٢ ، ١]

(١٩) د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، س ∈ [٢ ، ٥]

(٢٠) د(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

(٢١) د (س) = س هـ$^{-س}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

أجب عما يلى:

(٢٢) تفكير ابداعى: أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ى بحيث يحقق المنحنى د (س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ى الشروط التالية معًا:

(أ) يمر بنقطة الأصل.

(ب) له نقطة حرجة عند س = ١

(جـ) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، د (٢)) عليه هى ٩س + ص = ٢٠

٢ - ٣ دراسة المنحنيات

Investigating , Sketching Curves

سوف تتعلم

- تحديد فترات تحدب منحنى دالة لأعلى ولأسفل.
- إيجاد نقط الانقلاب لمنحنى دالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية.
- دراسة المنحنيات.

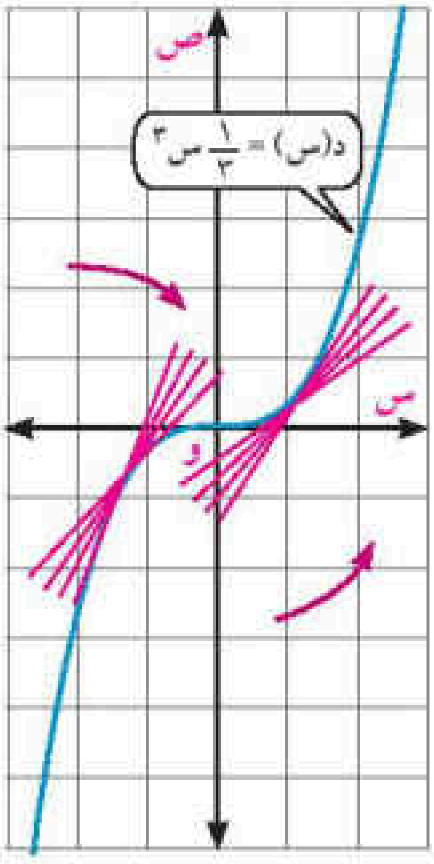
المصطلحات الأساسية

- التحدب Convexity
- تحدب لأعلى Convex upward
- تحدب لأسفل Convex downward
- نقطة انقلاب Inflection point

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب

استكشف



يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$د(س) = \frac{1}{3} س^3$ ، س ∈ ع

لاحظ أن الدالة د متزايدة على ع لماذا؟

هل يختلف اتجاه تقوس (تحدب) المنحنى في الفترة] -∞ ، ٠ [عن اتجاه تحدبه في الفترة] ٠ ، ∞ [؟

في الفترة] -∞ ، ٠ [ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د/ (س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟

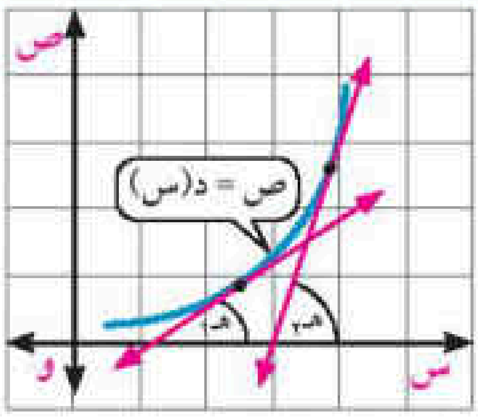
في الفترة]٠ ، ∞[ما موقع منحنى الدالة بالنسبة إلى جميع مماساته؟ هل يتزايد ميل المماس د/ (س) أم يتناقص بزيادة قيم س؟ ماذا تستنتج؟

تحدب المنحنيات

Convexity of a curves

تعريف

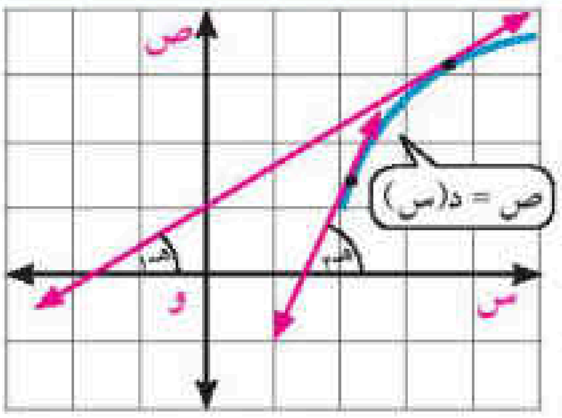
لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] أ ، ب [، يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت د/ متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبًا لأعلى إذا كانت د/ متناقصة على هذه الفترة.



المنحنى محدب لأسفل

د/ متزايدة وتكون مشتقتها موجبة

أي د//(س) > ٠



المنحنى محدب لأعلى

د/ متناقصة وتكون مشتقتها سالبة

أي د//(س) < ٠

إذا كان للدالة د مشتقة ثانية غير صفرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد وتناقص المشتقة الأولى د/ وتحديد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د.

اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات *The Second Derivative Test for Convexity*

نظرية

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

١ - إذا كان د″(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة]أ ، ب[

٢ - إذا كان د″(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة]أ ، ب[

مثال

تحديد فترات تحدب كثيرات الحدود

(١) إذا كان د (س) = ٢ - ٣س^{٢} - س^{٣} عين الفترات التى يكون فيها منحنى الدالة د محدبًا لأعلى ، والفترات التى يكون فيها محدبًا لأسفل.

الحل

د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∈ ع حيث:

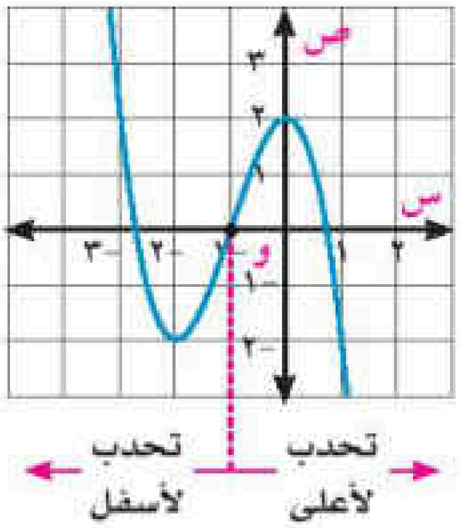
د′(س) = - ٦س - ٣ س^{٢} ، د″(س) = -٦ - ٦س = - ٦ (١ + س)

عندما د″(س) = ٠ ∴ س = -١

فترات التحدب: يبين الجدول المقابل إشارة د″ وفترات تحدب منحنى الدالة د لأعلى ولأسفل،

س	-∞	-١	∞
إشارة د″	+	٠	–
تحدب منحنى د	◡		◠

أى إن: منحنى الدالة محدب لأسفل فى الفترة]-∞ ، -١[ومحدب لأعلى فى الفترة]-١ ، ∞[



حاول أن تحل

(١) حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية:

(أ) د(س) = س^{٢} - ٤س + ٢ (ب) ر(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}

تكنولوجيا: باستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالتين د ، ر حيث ر(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، د(س) = س$^{\frac{٤}{٣}}$ وحدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل وحقق إجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

لاحظ أن: قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة .

تعريف

نقطة الانقلاب *Inflection point*

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، جـ ∈]أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ، د (جـ)). فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل.

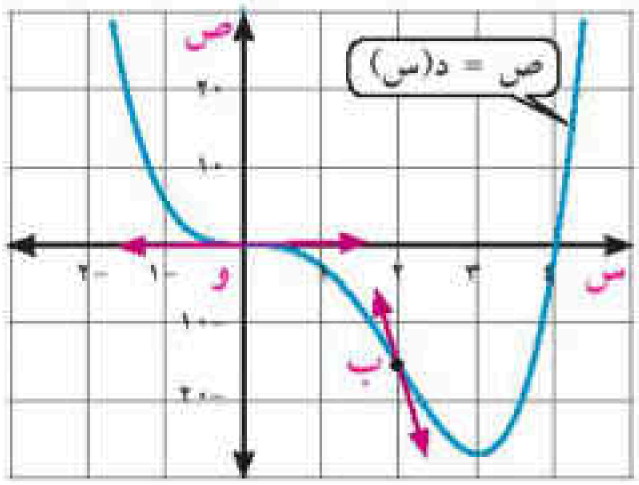
توجد نقط انقلاب للمنحنيات ١ ، ٢ ، ٣ لتغير اتجاه تحدب المنحنى ووجود مماس له عند جـ

لا توجد نقط انقلاب لعدم وجود مماس عند جـ

لاحظ أن:

١- المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة، لأن المنحنى فى إحدى جهتى هذه النقطة يقع تحت المماس ، وفى الجهة الأخرى يقع فوق المماس.

٢- **فى الشكل المقابل** يوجد لمنحنى الدالة د نقطتى انقلاب الأولى عند نقطة الأصل و (٠، ٠) والأخرى عند النقطة ب (٢، د(٢)).



مثال

التحدب ونقط الانقلاب

٢ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{2} - ٤ & \text{عندما } س < -٢ \\ س^{3} - ٣س + ٢ & \text{عندما } س \geqslant -٢ \end{cases}$

حدد فترات تحدب منحنى د لأعلى ولأسفل ، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة المماس عندها إن وجد.

الحل

الدالة د متعددة التعريف مجالها ع ، ومتصلة عند س = -٢ لأن $د(-٢)^{-} = د(-٢)^{+} = د(-٢) = ٠$

$$د'(-٢^{-}) = \underset{هـ \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{د(-٢+هـ) - د(-٢)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{(-٢+هـ)^{2} - ٤ - ٠}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^{-}}{نهـا} (هـ - ٤) = -٤$$

$$د'(-٢^{+}) = \underset{هـ \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{د(-٢+هـ) - د(-٢)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{(-٢+هـ)^{3} - ٣(-٢+هـ) + ٢ - ٠}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^{+}}{نهـا} (هـ^{2} - ٦هـ + ٩) = ٩$$

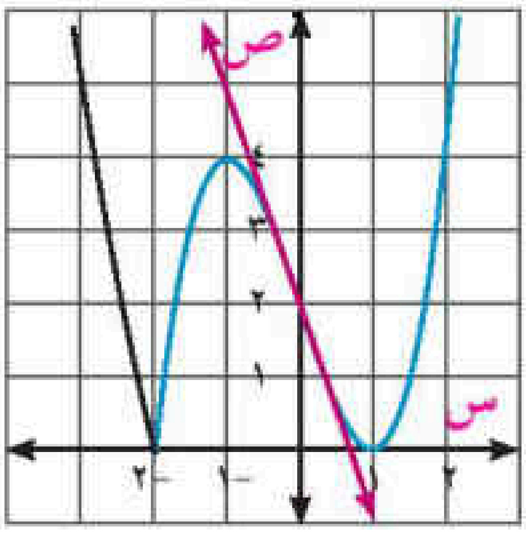
$\because د'(-٢^{-}) \neq د'(-٢^{+})$ $\quad \therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = -٢

$$د'(س) = \begin{cases} ٢س & \text{عندما } س < -٢ \\ ٣س^{2} - ٣ & \text{عندما } س > -٢ \\ \text{غير موجودة عندما } س = -٢ & [د'(-٢^{-}) \neq د'(-٢^{+})] \end{cases}$$

$$د''(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س < -٢ \\ ٦س & \text{عندما } س > -٢ \end{cases}$$

يبين الجدول التالى إشارة $د''$ وفترات تحدب منحنى الدالة لأعلى ولأسفل.

س	$-\infty$		-٢		٠		∞
إشارة $د''$		+	غير موجودة	-		+	
تحدب منحنى د		⌣		⌢		⌣	



فترات التحدب: منحنى د محدب لأسفل فى الفترة $]-\infty ، -٢[$ ، الفترة $]٠ ، \infty[$ ومحدب لأعلى فى الفترة $]-٢ ، ٠[$

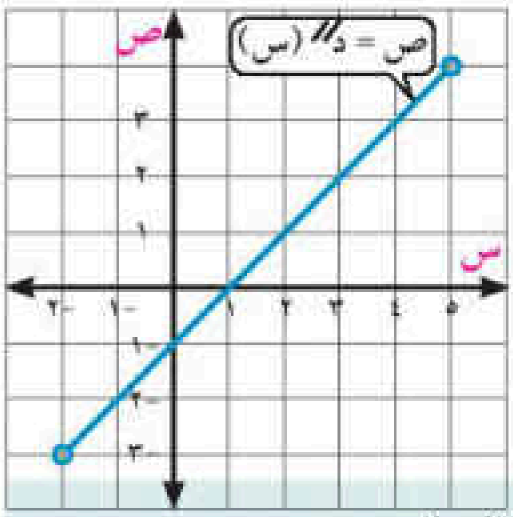
نقط الانقلاب

- النقطة $(-٢ ، د(-٢))$ أى $(-٢ ، ٠)$ ليست نقطة انقلاب لمنحنى د رغم تغير اتجاه تحدبه حولها، لعدم وجود مماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة ($د'(س)$ غير موجودة)
- النقطة $(٠ ، د(٠))$ أى $(٠، ٢)$ هى نقطة انقلاب لمنحنى د لتغير اتجاه تحدبه حولها، ويوجد عندها مماس للمنحنى يقطعه فى هذه النقطة ، ميله $د'(س) = -٣$، ومعادلته هى : $ص - ٢ = -٣$ س (كما فى الرسم)

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} (س + ٣)^٢ & \text{عندما } س < -١ \\ ٣س^٢ - س^٣ & \text{عندما } س \geqslant -١ \end{cases}$

حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د، وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها.



تفكير ناقد: يمثل الشكل المقابل منحنى $د''$(س) على الفترة $]-٢، ٥[$ للدالة المتصلة د.

- وضح فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د إن وجدت.
- هل توجد نقط انقلاب لمنحنى د فى هذه الفترة ؟ فسر إجابتك.

اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية

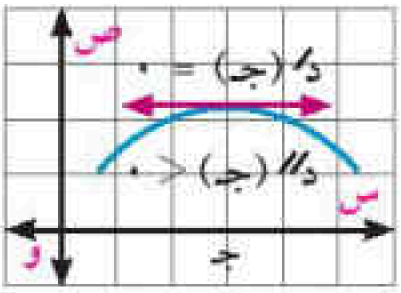
نظرية

لتكن الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى جـ حيث $د'(جـ) = ٠$

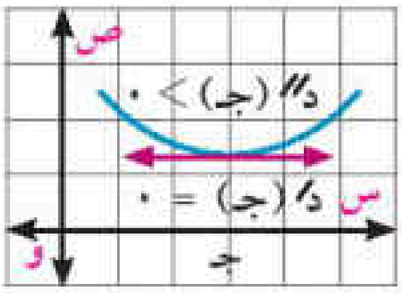
(١) إذا كانت $د''(جـ) < ٠$ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية.

(٢) إذا كانت $د''(جـ) > ٠$ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية.

(٣) إذا كانت $د''(جـ) = ٠$ فإن اختبار المشتقة الثانية لايستطيع تحديد نوع النقطة(جـ، د(جـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية.



د(جـ) قيمة عظمى محلية



د(جـ) قيمة صغرى محلية

مثال

(٣) استخدم اختبار المشتقة الثانية فى إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث :

د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٠

الحل

د(س) كثيرة حدود فهى متصلة ومجالها ع

د$'$(س) = ٤س^{٣} - ١٦ س = ٤س (س^{٢} - ٤) ، د$''$(س) = ١٢س^{٢} - ١٦

للدالة نقط حرجة عندما د$'$(س) = ٤س (س^{٢} - ٤) = ٠ أى عند: س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

اختبار المشتقة الثانية لوجود قيم عظمى أو صغرى محلية:

عند س = ٠   د$''$(٠) = -١٦ $<$ ٠   ∴ د(٠) = ١٠ قيمة عظمى محلية

عند س = ٢   د$''$(٢) = ٣٢ $>$ ٠   ∴ د(٢) = -٦ قيمة صغرى محلية

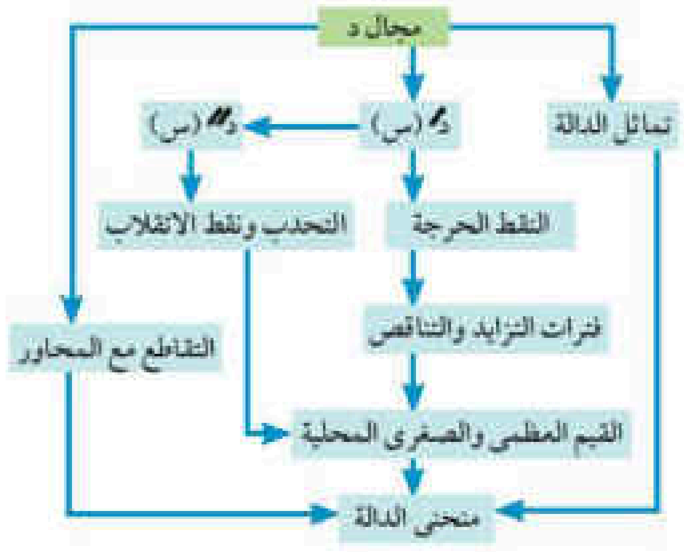
عند س = -٢   د$''$(-٢) = ٣٢ $>$ ٠   ∴ د(-٢) = -٦ قيمة صغرى محلية

حاول أن تحل

(٣) باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الحاسبة البيانية أو البرامج الرسومية.

دراسة ورسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الحدود

Curve Sketching for Polynomials



يستخدم حساب التفاضل فى رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال، ويعتمد على تتبع سلوك د(س) للدالة د عندما تتغير قيمة س فى فترة معينة، وتمثيل الأزواج المرتبة (س ، ص) فى المستوى الإحداثى المتعامد حيث ص = د(س) وسنقصر دراستنا على رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال على دوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة فأقل على الصورة د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ى

لرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) نتبع المخطط المقابل كما يلى:

١- إذا كانت د زوجية يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات، ويكون متماثلاً حول نقطة الأصل إذا كانت د فردية.

٢- دراسة تغيرات الدالة وتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب إن وجدت والقيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

٣- إعداد جدول التزايد والتناقص والتحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى ونوع النقط الحرجة.

٤- إيجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الإحداثيات إن امكن ذلك .

٥- رسم تخطيطى لمنحنى الدالة ويمكن الاستعانة ببعض النقط الإضافية لتحسين الرسم.

مثال
رسم منحنى دالة

④ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤

الحل

١- الدالة د كثيرة حدود مجالها ع ، والدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢- د$'$(س) = ٣س^{٢} - ٦س = ٣س (س - ٢) ، د$''$(س) = ٦س - ٦ = ٦(س - ١)

للدالة نقط حرجة عند د$'$(س) = ٠ أى عند س = ٠ ، س = ٢

وتكون د متزايدة فى الفترة]-∞ ، ٠[والفترة]٢ ،∞[ومتناقصة فى الفترة]٠ ،٢[

د$''$(س) = ٠ عند س = ١

د$''$(س) < ٠ فى الفترة]-∞ ، ١[ويكون المنحنى محدبًا لأعلى فى هذه الفترة،

د$''$(س) > ٠ فى الفترة]١ ، ∞[ويكون المنحنى محدبًا لأسفل فى هذه الفترة

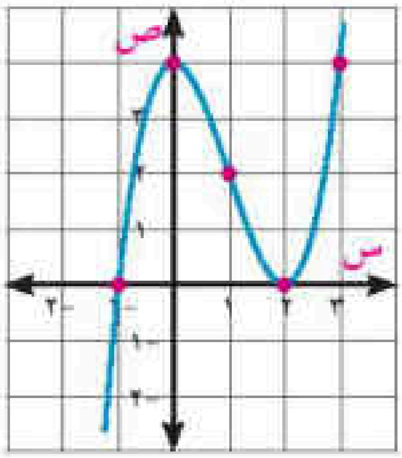
النقطة (١ ، د(١)) أى (١ ، ٢) نقطة انقلاب.

٣- جدول التزايد والتناقص والتحدب

س	∞-		٠		١		٢		∞
إشارة د$'$		+	٠		-		٠	+	
سلوك د		↗			↘			↗	
إشارة د$''$			-		٠		+		
تحدب د			⌒				◡		
ص			٤		٢		٠		
			قيمة عظمى محلية		نقطة انقلاب		قيمة صغرى محلية		

٤- نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : (٠، ٤) ، (٢، ٠)

٥- الشكل العام لمنحنى الدالة د



نقط إضافية : (-١ ، د(-١)) أى (-١ ، ٠) (٣ ، د(٣)) أى (٣ ، ٤)

حاول أن تحل

④ ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = ١٢ س - س^{٣}

مثال
الشكل العام لمنحنى دالة

⑤ ارسم شكلاً عامًا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت مايلى:

١- د دالة متصلة مجالها [١ ، ٧] ، د(١) = -٢ ، د(٥) = ٤

٢- د$'$(٥) = ٠ ، د$'$(س) > ٠ عندما س < ٥ ، د$'$(س) < ٠ عندما س > ٥

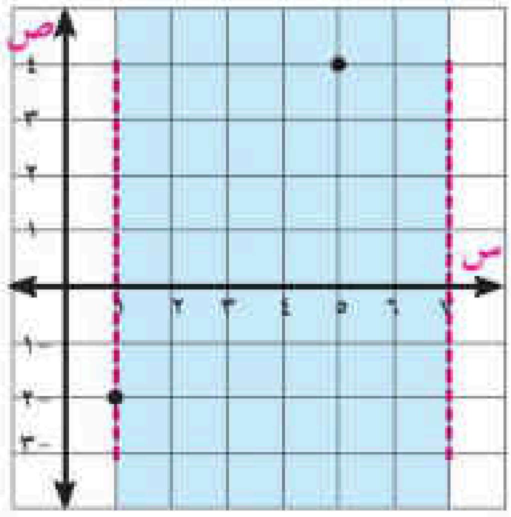
٣- د$''$(س) < ٠ عندما ١ < س < ٧

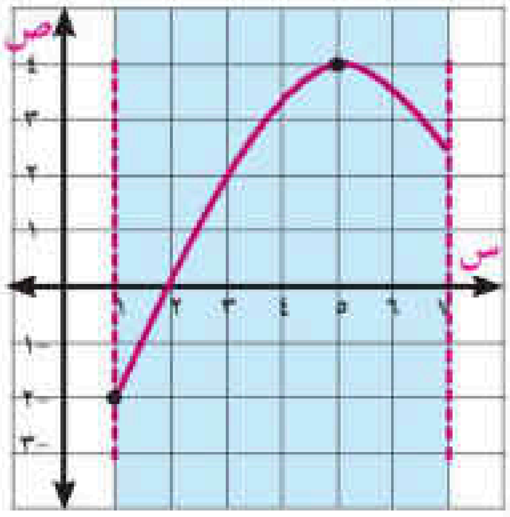
الحل

من (١): نرسم محورى الإحداثيات المتعامدة النقطتين (١، -٢) ، (٥، ٤) فى المجال [١، ٧].

من (٢): عند س = ٥ المماس // محور السينات، ود متزايدة على الفترة] ١، ٥[ومتناقصة على الفترة] ٥، ٧[

من (٣): المنحنى محدب لأعلى على] ١، ٧[





حاول أن تحل

٥ ارسم شكلاً عامًّا لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت ما يلى :

١- د متصلة مجالها [٠، ∞[، د(٤) = ٣ ، د(٠) = ١ **٢-** د′(س) > ٠ عندما س > ٠

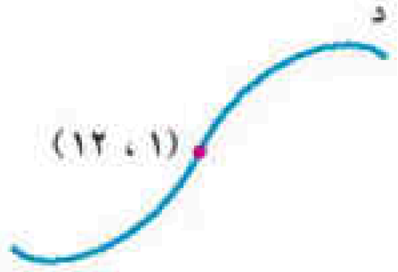
٣- د″(س) > ٠ عندما س < ٤ ، د″(٤) = ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س > ٤

مثال

حل معادلات

٦ إذا كانت النقطة (١، ١٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

الحل



∵ النقطة (١ ، ١٢) نقطة انقلاب لمنحنى د

∴ د″(١) = ٠ (١) ، د(١) = ١٢ (٢)

د′(س) = ٣ أس^{٢} + ٢ ب س ، د″(س) = ٦ أس + ٢ ب

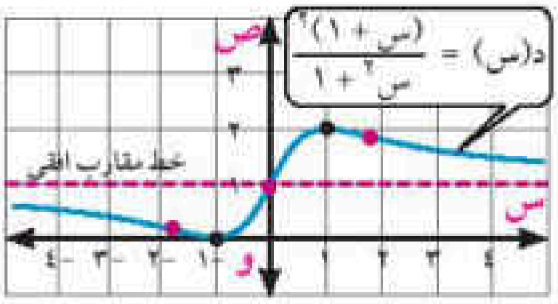
من (١): ٦أ + ٢ب = ٠ ∴ ب = -٣أ

من (٢): أ + ب = ١٢ ∴ أ - ٣أ = ١٢ ويكون أ = -٦ ، ب = ١٨

حاول أن تحل

٦ إذا كانت النقطة (٢، ٢) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية.

تكنولوجيا: بعض الدوال يصعب رسم منحناها البياني. يمكنك باستخدام برنامج geogebra أو أى برنامج رسومى آخر رسم منحنى الدالة ودراسة خواصه.



يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{(س + ١)^٢}{س^٢ + ١}$ ،

لاحظ:

١) النقط الحرجة: للمنحنى نقط حرجة عند س = -١ ، س = ١

عند س = -١ د(-١) = ٠ قيمة صغرى محلية، عند س = ١ د(١) = ٢ قيمة عظمى محلية.

٢) فترات التحدب: إلى أعلى:]-∞ ، -$\sqrt{٣}$[،]٠ ، $\sqrt{٣}$[، إلى أسفل:]-$\sqrt{٣}$ ، ٠[،]$\sqrt{٣}$ ، ∞[

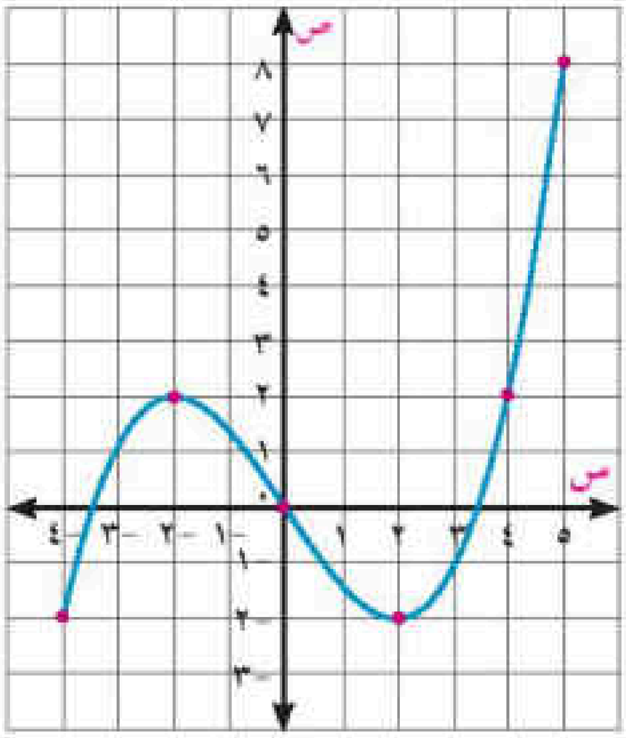
٣) نقطة الانقلاب: عند س = -$\sqrt{٣}$ يوجد مماس يقطع منحنى د ، عند س = $\sqrt{٣}$ يوجد مماس يقطع منحنى د

٤) الشكل العام للمنحنى: منحنى الدالة يقترب بطرفيه من المستقيم ص = ١ ويعرف بخط التقارب الأفقى لمنحنى الدالة ومعادلته ص = أ حيث: أ = $\lim_{|س| \to \infty} د(س) = \lim_{|س| \to \infty} \frac{(س + ١)^٢}{س^٢ + ١} = ١$

تطبيق: ارسم منحنيى الدالتين بأحد البرامج الرسومية ثم ادرس خواص كل منهما:

$د(س) = \frac{٤س^٢}{س^٢ + ٣}$ $ر(س) = \frac{س^٢ - ٤س}{س^٢ - ٤س + ٣}$

تمـاريـن ٢ - ٣



(١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث ص = د(س)، اكمل:

(أ) مجال د = ...

(ب) $د'(س) = ٠$ عندما س ∋ ....

(ج) $د''(س) > ٠$ عندما س ∋ ....

(د) المنحنى محدب لأعلى عندما س ∋ ....

(هـ) للمنحنى نقطة انقلاب هى ....

(و) للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ...

(ز) للدالة قيمة عظمى مطلقة تساوى ....

ابحث فترات تحدب الدالة د ثم أوجد إحداثيات نقط الانقلاب (إن وجدت) لكل ممايأتى:

(٢) $د(س) = ٤ - ٦س - ٣س^{٢}$

(٣) $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

(٤) $د(س) = ١٥س + ٦س^{٢} - س^{٣}$

(٥) $د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦$

(٦) $د(س) = \frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

(٧) $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٤}$

(٨) $د(س) = \begin{cases} (س - ٢)^{٢} & \text{عندما } س < ٤ \\ ٢٠ - س^{٢} & \text{عندما } س \geqslant ٤ \end{cases}$

(٩) $د(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٣س & \text{عندما } س < ٠ \\ ٤س - س^{٢} & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$

(١٠) أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{س}{١ - س^{٢}}$ يساوى $\frac{\pi}{٤}$

(١١) إذا كان لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = س(س - ٣)^{٢}$ قيمة عظمى محلية عند $س_{١}$، وقيمة صغرى محلية عند $س_{٢}$ فأثبت أن الإحداثى السينى لنقطة الانقلاب = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$

(١٢) أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى $س^{٢}ص + أص + بس^{٢} = ٠$ نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، -١).

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى:

(١٣) د(٠) = ٤ د(٣) = ٤ ، د′(س) > ٠ لكل س > ٢ ، د′(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د″(س) < ٠

(١٤) د(١) = د(٥) = ٠ ، د′(س) > ٠ لكل س > ٣ ، د′(س) < ٠ لكل س < ٣ ، د″(س) > ٠ لكل س ≠ ٣

(١٥) د(-١) = ٢ د(٠) = ٤ ، د(١) = ٠ ، د′(١) = د′(-١) = ٠ ، د″(س) > ٠ لكل س > ٠ ، د″(س) < ٠ لكل س < ٠

(١٦) د(٣) = ٤ ، عند س > ٣ فإن د′(س) < ٠ ، د″(س) < ٠ وعند س < ٣ فإن د′(س) > ٠ ، د″(س) < ٠

ادرس تغيرات الدالة د وارسم الشكل العام لمنحناها فى كل مما يأتى:

(١٧) د(س) = س^{٢} - ٦س + ٥

(١٨) د(س) = ٣ - س^{٢}

(١٩) د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣

(٢٠) د(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} - س + ٢

(٢١) د(س) = $\frac{١}{٨}$س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$س + ١

(٢٢) د(س) = - س (س - ٣)^{٢}

(٢٣) د(س) = (٢ - س) (س + ١)^{٢}

(٢٤) د(س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) (س - ٢)^{٢}

(٢٥) د(س) = { س^{٣} - ٣س^{٢} عندما س > ٠ ، س^{٢} - ٢س عندما س ≤ ٠

(٢٦) د(س) = س |س - ٤|

٢ - ٤ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

Applications of Maxima and Minima

النمذجة الرياضية *Mathematical Modeling*

سوف تتعلم

- النمذجة الرياضية

المصطلحات الأساسية

- نمذجة رياضية *Mathematical Modeling*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

إن عملية اتخاذ قرار علمى فى حل أى مشكلة تمر بعدة مراحل تتلخص فى:

١- تحديد المشكلة (الهدف والإمكانات).

٢- وضع نموذج فكرى أو تصور لأبعاد المشكلة.

٣- إيجاد نموذج علمى مناسب.

٤- حل النموذج واتخاذ القرار.

والنمذجة الرياضية هى صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضى، **ويتلخص فى المخطط المقابل حيث يتضمن :**

١- تحديد المشكلة المطروحة غايتها ومكوناتها (ربح أعظم - تكلفة أقل - مساحة أكبر ...)

٢- تحديد مجاهيل المسألة التى يجب إيجاد قيمها للوصول إلى الغاية المطلوبة.

٣- بيان العلاقات بين المجاهيل (معادلات - متباينات).

٤- صياغة النموذج الرياضى وهو تمثيل للمشكلة بصورة رياضية قابلة للحل.

٥- حل النموذج الرياضى وتفسير نتائجه وفق طبيعة المسألة .

٦- تحديد البدائل المتاحة إذا كان للمسألة أكثر من حل واحد.

ويسهم حساب التفاضل فى حل النموذج الرياضى لمعظم مشكلات الحياة العملية حين يكون الهدف هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما فى إطار القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة كما فى الأمثلة التالية.

مثال

اختبار المشتقة الأولى

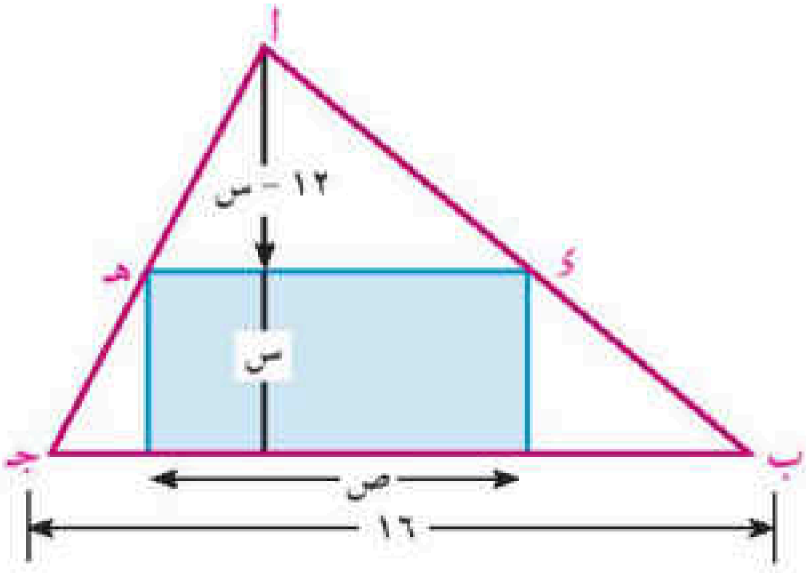
(١) أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث، طول قاعدته ١٦سم وارتفاعه ١٢سم، بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث.

الحل

١- لحساب أكبر مساحة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود .

٢- تحديد المتغيرات (المجاهيل)

بفرض أن عرض المستطيل = س سم وطوله ص سم ومساحته = م سم^2



٣- العلاقات بين المتغيرات (النموذج الرياضى)

مساحة المستطيل م = س × ص

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد إن أمكن

$\frac{ص}{١٦} = \frac{أء}{أب} = \frac{١٢ - س}{١٢}$ (من التشابه)

∴ ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ - س)، س ∈]٠ ، ١٢[(١)

مساحة المستطيل م = $\frac{٤}{٣}$ س (١٢ - س)

أى إن: م = د(س) = ١٦ س - $\frac{٤}{٣}$ س^٢ (٢)

٥- حل النموذج الرياضى: باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى س

∴ د′(س) = ١٦ - $\frac{٨}{٣}$ س ، د″(س) = - $\frac{٨}{٣}$

عند د′(س) = ٠ ∴ س = $\frac{١٦ \times ٣}{٨}$ = ٦ ويكون عندها د″(س) < ٠

∵ م لها نقطة حرجة وحيدة عند س = ٦ ، والمشتقة الثانية سالبة دائمًا ، فإن هذه النقطة الحرجة تعطى القيمة العظمى المطلقة.

∴ للدالة م قيمة عظمى مطلقة عند س = ٦ ، ص = $\frac{٨}{٣}$ (١٢ - ٦) = ٨

أى إن: للمستطيل أكبر مساحة عندما يكون بعداه ٦سم ، ٨سم

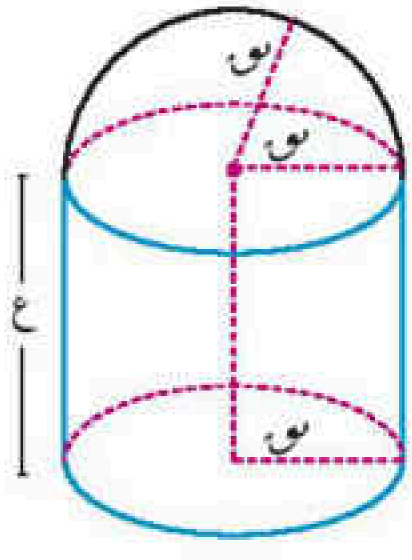
حاول أن تحل

(١) أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى ساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢سم.

مثال

حساب أقل تكلفة

(٢) يراد بناء صومعة حبوب على شكل أسطوانة رأسية ذات سقف نصف كُروى بحيث تتسع لتخزين ١٠٨πم^٣ من الحبوب (بفرض أن تخزين الحبوب يتم فى الجزء الأسطوانى فقط دون السقف)، إذا كانت تكلفة وحدة المساحة من السقف ضعف تكلفة وحدة المساحة من الجدار الجانبى. ما أبعاد الصومعة التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟



الحل

١- لحساب أقل تكلفة نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- **تحديد المتغيرات:** نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ع مترًا، طول نصف قطر قاعدتها = نق مترًا وأن تكلفة وحدة المساحة من الجدار = جـ جنيهًا فتكون تكلفة وحدة المساحة من السقف = ٢ جـ جنيهًا والتكاليف الكلية = ك جنيهًا.

٣- **العلاقات بين المتغيرات (النمذجة):**

مساحة السطح الأسطوانى = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢π نق ع وحدة مساحة

مساحة السطح النصف كرى = $\frac{1}{2}$ مساحة الكرة = $2\pi نق^{2}$ وحدة مساحة

التكاليف الكلية ك = 2π نق ع × جـ + $2\pi نق^{2} \times 2$ جـ = 2π نق جـ (ع + ٢نق)

٤- وضع النموذج الرياضى فى متغير واحد:

∵ حجم الجزء الأسطوانى = 108π ∴ $\pi نق^{2}ع = 108\pi$ **أى إن** ع = $\frac{108}{نق^{2}}$

التكاليف الكلية ك = 2π نق جـ ($\frac{108}{نق^{2}}$ + ٢نق)

ك = د(نق) = 216π جـ $نق^{-1}$ + 4π جـ $نق^{2}$

٥- حل النموذج: د'(نق) = -216π جـ $نق^{-2}$ + 8π جـ نق

النقط الحرجة = عند د'(نق) = ٠ ∴ $نق^{3} = \frac{216}{8}$ **أى إن** نق = ٣ (نقطة وحيدة)

اختبار المشتقة الثانية:

∵ د''(نق) = 432π جـ $نق^{-3}$ + 8π جـ ∴ د''(٣) > ٠

أى إن: عندما يكون طول نصف قطر الأسطوانة الرأسية ٣ أمتار يكون للصومعة أقل تكاليف، ويكون ارتفاعها عندئذ $\frac{108}{9}$ = ١٢ مترًا.

حاول أن تحل

(٢) خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترًا مكعبًا، وقاعدته مربعة. يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة، يتكلف القاع ٥٠ جنيهًا لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهًا لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهًا لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

مثال

تطبيقات حياتية

(٣) جدار ارتفاعه ٢ متر ويبعد مترين عن أحد المنازل، أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل مرتكزًا على الجدار.

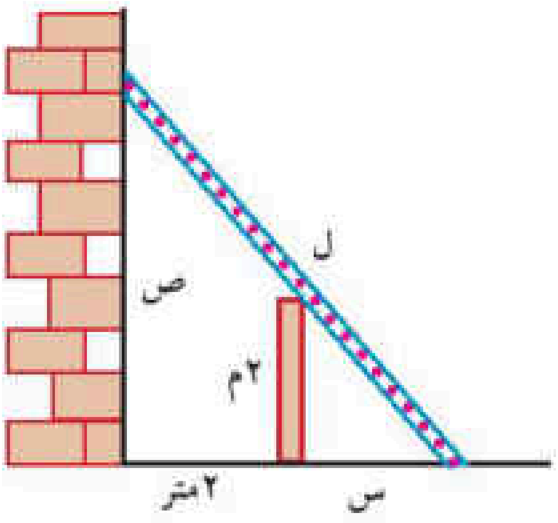
الحل

١- لحساب أقصر طول للسلم نرسم المسألة تبعًا للمعطيات والقيود.

٢- تحديد المتغيرات: نفرض أن:

طول السلم = ل مترًا، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص مترًا، بعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س مترًا.

٣- نمذجة المسألة:



من فيثاغورث: $ل^{2} = (س + 2)^{2} + ص^{2}$ (١)

من التشابه: $\frac{ص}{2} = \frac{س + 2}{س}$

∴ ص = $\frac{2س + 4}{س} = 2 + 4س^{-1}$ (٢)

لإيجاد أقصر طول للسلم يكفى أن تكون $ل^{2}$ قيمة صغرى

٤- حل النموذج باشتقاق طرفى العلاقة (١) ، (٢) بالنسبة إلى س.

∴ $\frac{د}{دس}(ل^{2}) = 2(س + 2) \times 1 + 2ص\frac{دص}{دس}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{-4}{س^{2}}$

$\therefore \frac{د}{د س}(ل^٢) = ٢(س+٢) + ٢\left(\frac{٢س+٤}{س}\right) \times \frac{-٤}{س^٢} = ٢(س+٢)\left(١ - \frac{٨}{س^٣}\right)$

س		٢	
إشارة $\frac{د}{د س}(ل^٢)$	−		+
$ل^٢$	↘		↗

عند النقط الحرجة: $\frac{د}{د س}(ل^٢) = $ صفر

$\therefore$ س = -٢ مرفوض أو $\frac{٨}{س^٣} = ١$

$\therefore$ س = ٢

من اختبار المشتقة الأولى للتزايد والتناقص نلاحظ تغير إشارة $\frac{د}{د س}(ل^٢)$ من - إلى +

$\therefore$ عند س = ٢ تكون $ل^٢$ أصغر ما يمكن

بالتعويض فى (٢) $\therefore$ ص = $\frac{٢ \times ٢ + ٤}{٢} = ٤$

بالتعويض فى (١)

$\therefore ل^٢ = (٢+٢)^٢ + (٤)^٢ = ٣٢$ $\therefore ل = ٤\sqrt{٢}$

أى إن: طول أقصر سلم يصل من الأرض إلى المنزل يساوى $٤\sqrt{٢}$ مترًا

حاول أن تحل

(٣) فى مستوى إحداثى متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة جـ (٣، ٢) و يقطع محورى الإحداثيات فى النقطة أ والنقطة ب، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠، ٠).

مثال

القطاع الدائرى

(٤) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى مساحته ١٦سم^٢ أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن، وما قياس زاويته عندئذ؟

الحل

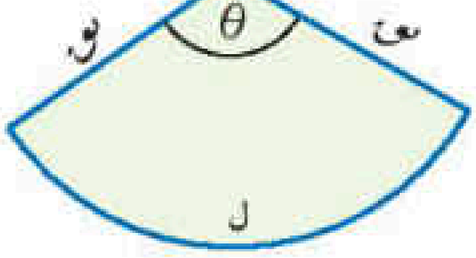
بفرض أن طول قوس القطاع ل سم، طول نصف قطر دائرة القطاع = نق سم

$\therefore$ محيط القطاع ح = ٢ نق + ل (١)

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = ١٦ $\therefore ل = \frac{٣٢}{نق}$ (٢)

بالتعويض فى (١) $\therefore ح = ٢ نق + \frac{٣٢}{نق}$

باشتقاق طرفى العلاقة (٢) بالنسبة إلى نق



$\frac{د ح}{د نق} = ٢ - \frac{٣٢}{نق^٢}$ ، $\frac{د^٢ ح}{د نق^٢} = \frac{٦٤}{نق^٣}$

عندما $\frac{د ح}{د نق} = ٠$ نق = ٤، $\frac{د^٢ ح}{د نق^٢} > ٠$

$\therefore$ عند نق = ٤ يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ $\theta^د$ $\therefore \theta = \frac{١٦ \times ٢}{٤ \times ٤} = ٢^د$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان محيط قطاع دائرى = ١٢سم، أوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن.

تمـــارين ٢ - ٤

(١) عددان مجموعهما ٣٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن، أوجد العددين.

(٢) عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن، أوجد العددين.

(٣) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن.

(٤) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تُحاط بسياج طوله ١٢٠ مترًا.

(٥) قطاع دائرى محيطه ٣٠سم، ومساحته أكبر ما يمكن، أوجد طول نصف قطر دائرته.

(٦) علبة على هيئة متوازى مستطيلات، قاعدتها مربعة الشكل . إذا كان مجموع جميع أحرفها يساوى ٢٤٠سم، فأوجد أبعادها حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن.

(٧) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠سم، فأوجد طول كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(٨) حقل مفتوح يحدُّه من أحد الجوانب نهر مستقيم . حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج، وما مساحة هذه الأرض حينئذ؟

(٩) تُصنَع علب أسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات، سعة كل منهما ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة ، أوجد نسبة ارتفاع العلبة (ع) إلى طول نصف قطر قاعدتها (نق).

(١٠) ملعب على شكل مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ مترًا، فأوجد أكبر مساحة له.

(١١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.

(١٢) قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل، بعداه ١٥سم ، ٢٤سم، قُطِعَ من أركانها الأربعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها س سم، ثم ثُنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء . احسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن.

(١٣) خزان مفتوح، قاعدته مربعة، وجوانبه رأسية، يسع كمية معينة من الماء . أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته.

(١٤) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠، ٥) وتقع على المنحنى ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ - ٤ .

(١٥) أوجد أقصر بعد بين المستقيم س - ٢ص + ١٠ = ٠ والمنحنى $ص^{٢}$ = ٤س .

(١٦) ا ب جـ مثلث حيث اً ، بً ثابتان . أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما والتى تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

(١٧) تُعطى شدة التيار ت (بالأمبير) فى دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة ت = ٢ جتا ن + ٢ جا ن، ما أقصى قيمة للتيار فى هذه الدائرة.

(١٨) ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة فى وسط غذائى طبقًا للعلاقة د(ن) = $٢٠٠٠ + \frac{٥٠٠٠\,ن}{١٠٠ + ن^{٢}}$ ، حيث الزمن ن مقيس بالساعات ، عين القيمة العظمى لحجم المزرعة.

(١٩) ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم ، م ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب م = س سم ، ن ∈ $\overline{جـ ء}$ بحيث جـ ن = $\frac{٣}{٢}$ س . أوجد قيمة س التى تجعل مساحة △ ا م ن أصغر ما يمكن.

(٢٠) $\overline{ا ب}$ قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق ، رُسم مماسان للدائرة عند كل من ا ، ب من النقطة هـ على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين من ء ، جـ على الترتيب . أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف ا ب جـ ء تساوى ٢نق^{٢} وحدة مربعة.

الوحدة الثالثة

التكامل المحدد وتطبيقاته

The Definite Integral and its Applications

مقدمة الوحدة

هل رأيت صانع السلال وهو يصنع إحدى سلاله؟ إن عملية تجميع الشرائح المتوازية جنبًا إلى جنب يؤدى إلى تكامل سلته. ساعد ذلك إلى محاولة العلماء اكتشاف طرق عامة لتقدير مساحة أى منطقة مستوية بتقسم أي منطقة مستوية إلى مناطق صغيرة جدًا ثم جمع مساحات هذه المناطق الصغيرة لتقدير المساحة المطلوبة مما ساهم في اكتشاف علم التكامل ورمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ وهو الحرف الأول من كلمة Sum والتي تعني عملية التجميع، فى هذه الوحدة ستعرف طرق مختلفة لحساب التكامل غير المحدد مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ لإيجاد مجموعة المشتقات العكسية لدالة متصلة على فترة معطاة ثم التعرف على التكامل المحدد من خلال النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل التى تربط بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد واستخدام التكامل المحدد فى إيجاد مساحة منطقة مستوية أو حجم جسم دورانى كما تتعرف على بعض التطبيقات الاقتصادية للتكامل المحدد واستخدام النمذجة الرياضية فى حل المشكلات الرياضية والحياتية .

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذه الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف تكامل الدالة الأسية، $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\ \text{ءس}$
- يتعرف بعض طرق التكامل مثل: التعويض غير المثلثى، التكامل بالتجزئ، $\int \text{س هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$
- يتعرف التكامل المحدد (النظرية الأساسية فى التفاضل) ويستنتج بعض خواصه.
  - $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = ٠$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س)}\ \text{ءس} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}]\ \text{ءس}$
    $= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ر(س)}\ \text{ءس}$
  - $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = ٢ \int_{٠}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$ حيث د دالة زوجية.
  - $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = ٠$ حيث د دالة فردية.
- يوجد مساحة المنطقة المستوية بين منحنى ومحور السينات .
- يستخدم التكامل المحدد فى حل مشكلات تتضمن إيجاد حجم سطح دورانى حول محور السينات.

المصطلحات الأساسية

- مشتقة عكسية *Antiderivative*
- تكامل غير المحدد *Indefinite Integral*
- تفاضلي *Differential*
- تكامل بالتعويض *Integration by Substitution*
- تكامل بالتجزئ *Integration by Parts*
- قاعدة *Rule*
- تكامل محدد *Definite Integral*
- النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل *Fundamental theorem of calculus*
- المساحات فى المستوى *Areas in the plane*
- حجوم الأجسام الدورانية *Volumes of Revolution solids*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.

الدرس (٣ - ٢): طرق التكامل.

الدرس (٣ - ٣): التكامل المحدد.

الدرس (٣ - ٤): تطبيقات على التكامل المحدد.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب.
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت).

مخطط تنظيمى للوحدة

٣ - ١ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of Exponential and Logarithmic Function

سوف تتعلم

- تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تطبيقات هندسية.
- تطبيقات فيزيائية.

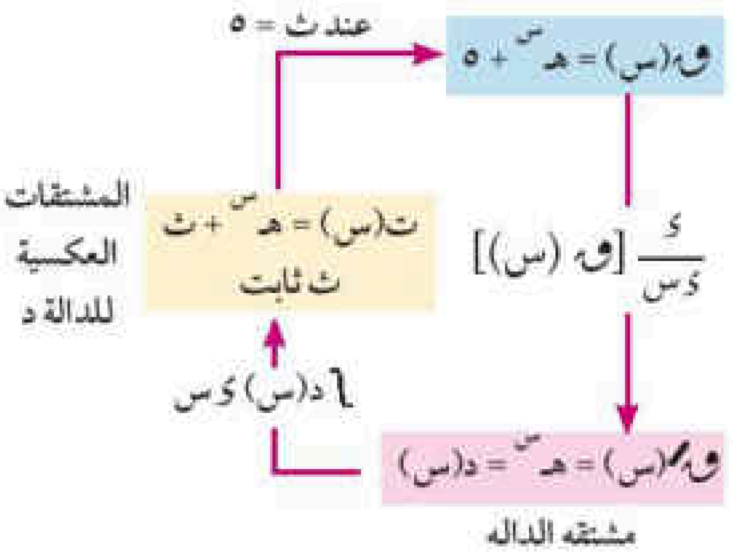
المصطلحات الأساسية

- مشتقة عكسية Antiderivative
- تكامل Integration
- تكامل غير محدد Indefinite integral
- ثابت اختيارى Arbitrary constant

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى.

استكشف



من دراستك السابقة فى التفاضل تعلم أن مشتقة الدالة و بالنسبة إلى س حيث و(س) = $هـ^{س}$ + ٥ هى و/(س) = $هـ^{س}$

إذا رمزنا للدالة و/(س) بالرمز د(س) فإننا نستطيع بعملية عكسية (التكامل غير المحدد) إيجاد عدد غير محدد من الدوال الأخرى (ت(س) + ث) مشتقة كل منها يساوى د(س) تسمى بمجموعة المشتقات العكسية للدالة د إحداها يساوى و(س) حيث:

∫ د(س) ءس = ت(س) + ث   **حيث ث ثابت اختيارى**

استكشف مجموعة المشتقات العكسية لكل من:

د(س) = ٥$هـ^{٥س}$ ، ر(س) = ٨$هـ^{٤س}$ ، و(س) = $\frac{١}{س}$

تعلم

التكامل غير المحدد للدالة الأسية

Indefinite Integrals of Exponential Function

> **إذا كان** ك عددًا حقيقيًّا حيث ك ≠ ٠
>
> **فإن:** ∫ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + ث
>
> ، ∫ $هـ^{كس}$ ءس = $\frac{١}{ك}$ $هـ^{كس}$ + ث   **حيث ث ثابت اختيارى**

مثال

(١) أوجد:

(أ) ∫ $هـ^{٧س}$ ءس   (ب) ∫ $هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}$ ءص   (جـ) ∫ ٨$هـ^{٢ع}$ ءع

الحل

(أ) ∫ $هـ^{٧س}$ ءس = $\frac{١}{٧}$ $هـ^{٧س}$ + ث

(ب) $\int هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} ء ص = \frac{١}{-\frac{٣}{٤}} هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} + ث = \frac{-٤}{٣} هـ^{-\frac{٣}{٤}ص} + ث$

(جـ) $\int ٨هـ^{٢ع} ء ع = ٨\int هـ^{٢ع} ء ع = \frac{٨}{٢} هـ^{٢ع} + ث = ٤هـ^{٢ع} + ث$

تذكر أن

$\int أ\, د(س)\, ء س = أ \int د(س)\, ء س$

حاول أن تحل

(١) أوجد

(أ) $\int \pi هـ^{س} ء س$ (ب) $\int -هـ^{-٥ع} ء ع$ (جـ) $\int -٦هـ^{-٠,٢ص} ء ص$ (د) $\int ٣\sqrt{٢}\, هـ^{-\sqrt{٢}ن} ء ن$

مثال

(٢) أوجد كل من التكاملات التالية:

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢} ء س$ (ب) $\int \frac{٣هـ^{س} - ٢هـ^{٢س}}{٢هـ^{س}} ء س$

الحل

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢} ء س = \frac{١}{٢}\int (هـ^{س} + هـ^{-س}) ء س$

$= \frac{١}{٢}[\int هـ^{س} ء س + \int هـ^{-س} ء س]$

$= \frac{١}{٢}(هـ^{س} - هـ^{-س}) + ث$

(ب) $\int \frac{٣هـ^{س} - ٢هـ^{٢س}}{٢هـ^{س}} ء س = \int \frac{٣}{٢} ء س - \int هـ^{س} ء س$

$= \frac{٣}{٢}س - هـ^{س} + ث$

تذكر أن

$\int [د(س) \pm ر(س)]\, ء س$

$= \int د(س)\, ء س \pm \int ر(س)\, ء س$

حاول أن تحل

(٢) أوجد:

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}} ء س$ (ب) $\int (س^{٢} + ٢هـ^{س}) ء س$ (جـ) $\int (س^{٢هـ} + هـ^{٣س}) ء س$

لاحظ أن: إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن:

$$\int هـ^{د(س)} \cdot د'(س)\, ء س = هـ^{د(س)} + ث$$

مثال

(٣) (أ) $\int جا س\, هـ^{جتا س} ء س$ (ب) $\int ٤س\, هـ^{س^{٢}+١} ء س$

الحل

(أ) بوضع $د(س) = جتا س$ $\therefore د'(س) = -جا س$

$\int جا س\, هـ^{جتا س} ء س = -\int هـ^{جتا س}(-جا س)\, ء س = -هـ^{جتا س} + ث$

(ب) بوضع $د(س) = س^{٢} + ١$ $\therefore د'(س) = ٢س$

$\int ٤س\, هـ^{س^{٢}+١} ء س = ٢\int هـ^{س^{٢}+١}(٢س)\, ء س = ٢هـ^{س^{٢}+١} + ث$

حاول أن تحل

(٣) أوجد التكاملات التالية:

(أ) $\int (\text{جتا س } \text{هـ}^{\text{جاس}} + ٣\text{س}^{٢})\ \text{ءس}$

(ب) $\int (\text{س} - ٣)\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥}\ \text{ءس}$

التكامل غير المحدد لدوال تؤول لدوال لوغارتيمية *Indefinite Integral of Logarithmic Functions*

تعلم أن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}) = \frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} > ٠$ ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\ {-\text{س}}) = -\frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} < ٠$

وبوجه عام فإن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| = \frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

أي إن الدالة $\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$ حيث $\text{س} \neq ٠$ إحدى المشتقات العكسية للدالة $\frac{١}{\text{س}}$

وعلى ذلك فإن: $\int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

مضاعفات الدالة

مثال

(٤) أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

(أ) $\int \frac{٢}{\text{س}}\ \text{ءس}$ (ب) $\int \frac{٧}{\text{س لو}_{\text{هـ}}٣}\ \text{ءس}$

الحل

(أ) $\int \frac{٢}{\text{س}}\ \text{ءس} = ٢\int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس} = ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

(ب) $\int \frac{٧}{\text{س لو}_{\text{هـ}}٣}\ \text{ءس} = \frac{٧}{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}\int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{٧}{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$ حيث $\text{س} \neq ٠$

حاول أن تحل

(٤) أوجد:

(أ) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}٣}{\text{س}}\ \text{ءس}$ (ب) $\int \frac{٤}{٣\text{س لو}_{\text{هـ}}٥}\ \text{ءس}$ (جـ) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}}\ \text{ءس}$

مثال

٥ أوجد كلًا من التكاملات الآتية:

أ $\int (٣س^{٢} + \frac{٥}{س})\, ءس$ ب $\int (\frac{٢هـ}{س} + \frac{س}{هـ})\, ءس$ ج $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{٣س}$

الحل

أ $\int (٣س^{٢} + \frac{٥}{س})\, ءس = \int ٣س^{٢}\, ءس + \int \frac{٥}{س}\, ءس = س^{٣} + ٥ \, لو_{هـ} |س| + ث$

ب $\int (\frac{٢هـ}{س} - \frac{س}{هـ})\, ءس = ٢هـ \int \frac{١}{س}\, ءس - \frac{١}{هـ} \int س\, ءس = ٢هـ \, لو_{هـ} |س| - \frac{س^{٢}}{٢هـ} + ث$

ج $\int \frac{(٣س - ١)^{٢}}{٣س}\, ءس = \int \frac{٩س^{٢} - ٦س + ١}{٣س}\, ءس = \int (٣س - ٢ + \frac{١}{٣س})\, ءس$

$= \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س + \frac{١}{٣} \, لو_{هـ} |س| + ث$ حيث $س \neq ٠$

حاول أن تحل

٥ أوجد كلًا من التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٦س^{٢} - ٥}{٣س}\, ءس$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س}\, ءس$ ج $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}})^{٢}\, ءس$

لاحظ أن: إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق ، $د(س) \neq ٠$ فإن $\int \frac{١}{د(س)} \cdot دَ(س)\, ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

مثال

٦ أوجد كلًا من التكاملات التالية:

أ $\int \frac{٤}{١ + ٢س}\, ءس$ ب $\int \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س - ٢}\, ءس$ ج $\int ظا\, س\, ءس$

الحل

أ $\because (١ + ٢س)' = ٢ \quad \therefore \int \frac{٤}{١ + ٢س}\, ءس = ٢ \int \frac{(١ + ٢س)'}{١ + ٢س}\, ءس = ٢ \, لو_{هـ} |١ + ٢س| + ث$

ب $\because (س^{٢} + ٣س - ٢)' = ٢س + ٣$

$\therefore \int \frac{٢س + ٣}{س^{٢} + ٣س - ٢}\, ءس = لو_{هـ} |س^{٢} + ٣س - ٢| + ث$

ج $\int ظا\, س\, ءس = \int \frac{جا س}{جتا س}\, ءس = - لو_{هـ} |جتا س| + ث = لو_{هـ} |قا س| + ث$

حاول أن تحل

٦ أوجد كلًا من التكاملات الآتية:

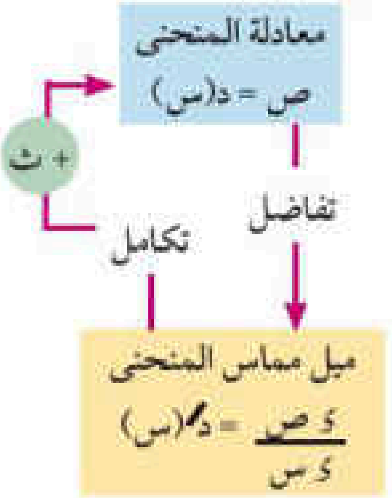
أ $\int ظتا\, س\, ءس$ ب $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٢س}\, ءس$ ج $\int \frac{(س^{٢} + ٢)\, ءس}{س^{٣} + ٦س + ١}$

مثال

٧ **تطبيقات هندسية:** منحنى ميل المماس له عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $\frac{٣س + ٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥)

الحل

بفرض معادلة المنحنى ص = د(س)



∵ ميل المماس عند أي نقطة $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س + ٢}{س}$

∴ ص $= \int \frac{ءص}{ءس}$ ءس $= \int (٣ + \frac{٢}{س})$ ءس

∴ ص = ٣س + ٢ لوهـ س + ث حيث ث ثابت إختيارى

∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٣هـ + ٥) فهي تحقق معادلته أي إن:

٣هـ + ٥ = ٣ (هـ) + ٢ لوهـ هـ + ث ∴ ث = ٣

و تكون معادلة المنحنى هي: ص = ٣س + ٢ لوهـ س + ٣

حاول أن تحل

٧ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $\frac{١}{٢س - هـ}$ وكان د(هـ) = $\frac{١}{٢}$ أوجد د(٢هـ)

مثال

٨ **تطبيقات فيزيائية:** إذا كان معدل التغير في مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{ءم}{ءن} = هـ^{-٠٫١ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠سم^{٢}، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

الحل

مساحة سطح الصفيحة م $= \int \frac{ءم}{ءن}$ ءن $= \int هـ^{-٠٫١ن}$ ءن

∴ م $= -١٠هـ^{-٠٫١ن}$ + ث

عند بداية التغير ن = ٠ ، م = ٨٠ ∴ ث = ٩٠

ويكون مساحة سطح الصفيحة في أي لحظة م $= ٩٠ - ١٠هـ^{-٠٫١ن}$

بعد ١٠ ثوانٍ ∴ مساحة سطح الصفيحة $= ٩٠ - ١٠هـ^{-١}$ سم^{٢}

حاول أن تحل

٨ اذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيًا مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هي على الترتيب ٢٠٠، ٣٠٠ وحدة. أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.

تمارين ٣ - ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\text{د}''(\text{س}) = \frac{١}{٢}[\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}]$ ، $\text{د}(٠) = ١$ ، $\text{د}'(٠) = ٠$ فإن د(س) تساوي:

(أ) $-\text{د}'(\text{س})$ (ب) $\text{د}'(\text{س})$ (ج) $-\text{د}''(\text{س})$ (د) $\text{د}''(\text{س})$

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $٤\text{هـ}^{٢\text{س}}$ ، $\text{د}(٠) = ٢$ فإن $\text{د}(-٢)$ تساوي:

(أ) ٤ (ب) $٤\text{هـ}^{-٤}$ (ج) $٢\text{هـ}^{-٤}$ (د) ٢هـ

(٣) $\int \text{طا}\,\theta \; \text{ء}\theta$ تساوي

(أ) $-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\,\theta| + \text{ث}$ (ب) $-\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا}\,\theta + \text{ث}$ (ج) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا}\,\theta + \text{ث}$ (د) $|\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتا}\,\theta| + \text{ث}$

(٤) $\int ٤\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^٢}\,\text{ءس}$ تساوي

(أ) $\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ (ب) $\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ (ج) $٢\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$ (د) $٤\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{ث}$

أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

(٥) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}}\,\text{ءس}$

(٦) $\int (٣\text{س}^٢ + ٢\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$

(٧) $\int (\frac{٤}{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{ءس}$

(٨) $\int \text{هـ}^{١-٣\text{س}}\,\text{ءس}$

(٩) $\int \frac{٧}{٢}\text{هـ}^{٣\text{س}-٤}\,\text{ءس}$

(١٠) $\int ٢\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)^٢\,\text{ءس}$

(١١) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} + ٢\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٤}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(١٢) $\int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}^٣+١}\,\text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\,\text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{ءس}}{٤\text{س} - ١}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس}$

(١٦) $\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

(١٧) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

(١٨) $\int \frac{\text{جتاس}}{١ + \text{جاس}}\,\text{ءس}$

(١٩) $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس} - ١}\,\text{ءس}$

(٢٠) $\int \frac{١}{\text{س}\;\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢١) $\int \frac{٢\text{س}}{(\text{س} + ١)^٢}\,\text{ءس}$

(٢٢) $\int \frac{(\text{لوس})^٢}{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢٣) $\int \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ١}\,\text{ءس}$

(٢٤) $\int \frac{٣\text{س}^٢ - ٥}{\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

(٢٥) $\int \frac{٤\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

(٢٦) $\int \frac{٤}{\text{س}\;\text{لو}_{\text{هـ}}٣\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢٧) $\int \frac{(١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^٢}{\text{س}}\,\text{ءس}$

(٢٨) تطبيقات هندسية: إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) يساوي $٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}$،
$\text{د}(٠) = ١$ أوجد $\text{د}(٣)$

٣ - ٢ طرق التكامل

Methods of Inegration

سوف تتعلم

- إيجاد الدالة الأصلية لدالة معطاة.
- إيجاد تفاضلى دالة.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكامل بالتجزئ.

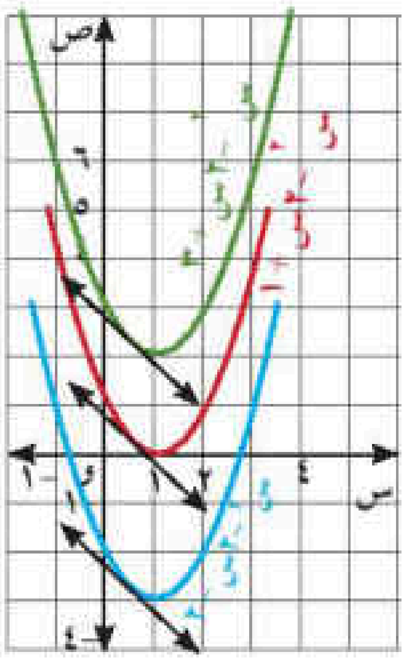
المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسة Antiderivative
- التكامل غير المحدد Indefinite Integral
- تفاضلى Differential

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

مقدمة



سبق وتعرفت على المشتقة العكسية أو التكامل غير المحدد، وهو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، فيقال للدالة ت أنها مشتقة عكسية للدالة د فى فترة ف إذا كان: $\frac{د}{د س}$ ت (س) = د (س) لكل س ∋ ف

عند إضافة أى ثابت للمشتقة العكسية ت، (**يعرف بالثابت الاختيارى**) تُمثّل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات ص = ت (س) + ث التى تختلف عن بعضها فى الثابت ث وميل المماس لأى منها متساوى لذلك فهى منحنيات متوازية كما فى الشكل المقابل، وقد اصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية هذه بالتكامل غير المحدد و يرمز له بالرمز: ∫ د (س) ء س ويكون:

$$\int د(س)\ ء س = ت(س) + ث$$

للتكامل غير المحدد الخواص التالية:

إذا كانت د ، ر دالتين لهما مشتقتان عكسيتان فى الفترة ف فإن:

١- ∫ [د (س) ± ر (س)] ء س = ∫ د (س) ء س ± ∫ ر (س) ء س

٢- ∫ ك د (س) ء س = ك ∫ د (س) ء س حيث ك عدد حقيقى ثابت

لاحظ أن:

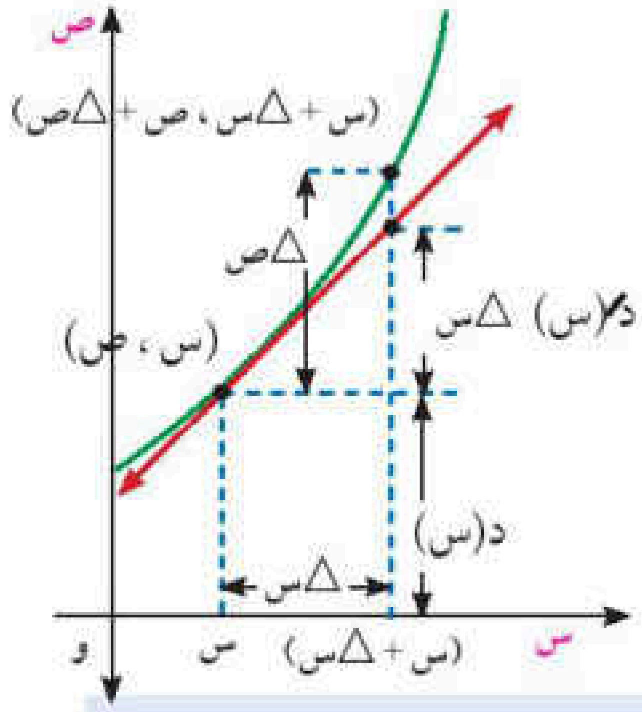
∫ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ن ≠ -١ ، ث ثابت اختيارى

وعلى ذلك

∫ (٣س^{٢} + ٤س + ٥) ء س = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥س + ث

عملية إيجاد المشتقات العكسية يتطلب معرفة صور التكاملات القياسية لبعض الدوال، إلا أن التكاملات المطلوب إيجادها قد تظهر بعيدة عن التكاملات القياسية وهو أمر يتطلب التعرف على طرق أخرى للتكامل منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزىء اعتمادًا على تفاضلى الدالة.

التفاضلات *Differentials*



إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق ، حيث ص = د (س)

من تعريف المشتقة:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\triangle\text{س} \to 0} \frac{\triangle\text{ص}}{\triangle\text{س}} = \lim_{\triangle\text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \triangle\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\triangle\text{س}}$

∴ عندما △ س ⟵ ٠ **فإن:** $\frac{\triangle\text{ص}}{\triangle\text{س}} \longrightarrow \text{د}'(\text{س})$

أي أن: $\frac{\triangle\text{ص}}{\triangle\text{س}} \simeq \text{د}'(\text{س})$ **عندما** △ س ≃ ٠ ، △ س ≠ ٠

∴ △ ص ≃ د/(س)△س (بالضرب × △س)

تعريف

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، △ س يرمز للتغير فى س حيث △ س ≠ ٠ فإن

١- تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ء ص) = د/(س) △ س

٢- تفاضلى س (ويرمز بالرمز ء س) = △ س

على ذلك فإن:

ء ص = د/(س) ء س وهو دالة فى متغيرين س ، ء س

إذا كانت ص = س^3 **فإن :** ء ص = 3س^2 ء س

مثال

تفاضلى الدالة

(١) أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

(أ) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$ (ب) ع = $\frac{4}{3}\pi\text{نق}^3$

(جـ) ص = ع . ل حيث كل من ع ، ل دالة فى س

الحل

(أ) ∵ ء ص = ص/ ء س ، ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - 1} = 1 + \frac{1}{\text{س} - 1} = 1 + (\text{س} - 1)^{-1}$

∴ ء ص = $\frac{-1}{(\text{س} - 1)^2}$ ء س

(ب) ∵ ء ع = ع/ ء نق ∴ ء ع = $\frac{4}{3}\pi \times 3\text{نق}^2$ ء نق = $4\pi\text{نق}^2$ ء نق

(جـ) ∵ ء ص = (ع • ل)/ ء س

= (ع • ل/ + ل • ع/) ء س

= ع • ل/ ء س + ل • ع/ ء س

ء ص = ع ء ل + ل ء ع

لاحظ أن

ء ل = ل/ ء س

ء ع = ع/ ء س

حاول أن تحل

① أوجد تفاضلى كل من:

(أ) ص = $(٢س + ٥)^{٤}$ (ب) ص = $هـ^{٢س - ٣}$

تفكير ناقد: إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ أوجد: ءص بدلالة س، ص، ءس

التكاملات الأساسية (القياسية)

لا توجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال، إذ ينحصر إيجاد تكامل أى دالة د فى البحث عن دالة تكون مشتقاتها هى الدالة د وهذا يتوقف على مدى استيعابك لمشتقات الدوال الأساسية السابق دراستها، والتى نلخصها فى الجدول التالى:

جدول مشتقات الدوال الأساسية والتكاملات القياسية المناظرة	
$\frac{ء}{ءس}(س^{ن}) = ن س^{ن-١}$ ، ن ∈ ع	$\int س^{ن} ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، ن ∈ ع - {-١}
$\frac{ء}{ءس}$ (جا س) = جتا س	$\int$ جتا س ءس = جا س + ث
$\frac{ء}{ءس}$ (جتا س) = - جا س	$\int$ جا س ءس = - جتا س + ث
$\frac{ء}{ءس}$ (ظا س) = $قا^{٢}$س ، س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص	$\int قا^{٢}$ س ءس = ظا س + ث ، س ≠ $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص $\int قتا^{٢}$ س ءس = -ظتا س + ث ، س ≠ ن π ، ن ∈ ص $\int$ قاس ظا س ءس = قا س + ث $\int$ قتا س ظتا س ءس = -قتا س + ث
$\frac{ء}{ءس}(هـ^{س}) = هـ^{س}$	$\int هـ^{س} ءس = هـ^{س} + ث$
$\frac{ء}{ءس}(ا^{س}) = ا^{س}$ لوهـ ا ، ا > ٠ ، ا ≠ ١	$\int \frac{١}{س} ءس$ = لوهـ |س| + ث ، س ≠ ٠
$\frac{ء}{ءس}$ (لوهـ س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠	

التكامل بالتعويض *Integration by Substitntion*

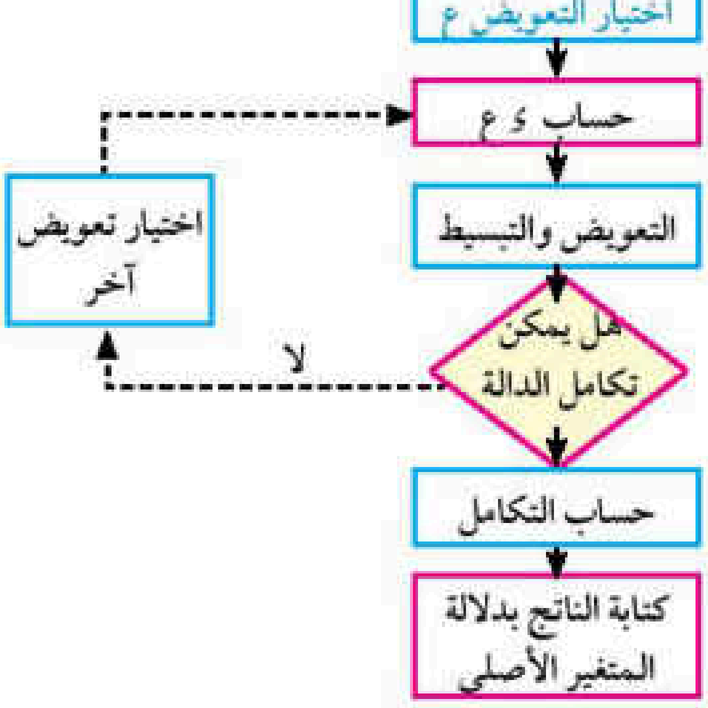
من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين على الصورة: $\int$ د (ر (س)) ر َ(س) ءس

فإذا كانت ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق

فإن ءع = ر َ(س) ءس ويكون:

$\int$ د (ر (س)) ر َ(س) ءس = $\int$ د (ع) ءع

لإجراء عملية التكامل بالتعويض نتبع المخطط المقابل:



مثال

التكامل بالتعويض

(٢) أوجد

(أ) $\int$ س^٣ (٢س^٤ - ٧)^٥ ى س

(ب) $\int \frac{س + ٤}{(س^٢ + ٨س)^٣}$ ى س

الحل

(أ) بوضع ع = ٢س^٤ - ٧ ∴ ى ع = ٨س^٣ ى س

$\int$ س^٣ (٢س^٤ - ٧)^٥ ى س = $\frac{١}{٨}\int$ (٢س^٤ - ٧)^٥ (٨س^٣ ى س) (ع ، ى ع)

= $\frac{١}{٨}\int$ ع^٥ ى ع = $\frac{١}{٨ \times ٦}$ ع^٦ + ث

= $\frac{١}{٤٨}$ (٢س^٤ - ٧)^٦ + ث

(ب) بوضع ع = س^٢ + ٨س ∴ ى ع = (٢س + ٨) ى س = ٢ (س + ٤) ى س

$\int \frac{س + ٤}{(س^٢ + ٨س)^٣}$ ى س = $\frac{١}{٢}\int \frac{٢(س + ٤) ى س}{(س^٢ + ٨س)^٣}$ = $\frac{١}{٢}\int \frac{١}{ع^٣}$ ى ع

= $\frac{١}{٢}\int$ ع$^{-٣}$ ى ع = $\frac{١}{٢ \times -٢}$ ع$^{-٢}$ + ث

= $\frac{-١}{٤(س^٢ + ٨س)^٢}$ + ث

حاول أن تحل

(٢) أوجد :

(أ) $\int$ ٣س (س^٢ + ٣)^٤ ى س

(ب) $\int \frac{س^٢}{(س^٣ - ٤)^٥}$ ى س

مثال

التكامل بالتعويض

(٣) أوجد

(أ) $\int$ س (س + ٤)^٧ ى س

(ب) $\int$ (س^٢ + ٥) $\sqrt{س - ١}$ ى س

الحل

(أ) بوضع ع = س + ٤ ∴ س = ع - ٤ ، ى س = ى ع

$\int$ س (س + ٤)^٧ ى س = $\int$ ع^٧ (ع - ٤) ى ع = $\int$ (ع^٨ - ٤ ع^٧) ى ع (تعويض)

= $\frac{١}{٩}$ ع^٩ - $\frac{١}{٢}$ ع^٨ + ث (تكامل)

= $\frac{١}{١٨}$ ع^٨ (٢ ع - ٩) + ث (تبسيط)

= $\frac{١}{١٨}$ (س + ٤)^٨ (٢س - ١) (تعويض عن ع)

(ب) بوضع $ع^٢ = س - ١$ **لتبسيط صورة التكامل** $\therefore$ $س = ع^٢ + ١$ ، $ءس = ٢ع\ ءع$

$\int (س^٢+٥)\sqrt{س-١}\ ءس = \int [(ع^٢+١)^٢+٥] \times ع \times ٢ع\ ءع$ **(تعويض)**

$= \int [ع^٤ + ٢ع^٢ + ٦] \times ٢ع^٢\ ءع$

$= ٢\int (ع^٦ + ٢ع^٤ + ٦ع^٢)\ ءع$ **(تبسيط)**

$= ٢[\frac{١}{٧}ع^٧ + \frac{٢}{٥}ع^٥ + ٢ع^٣] + ث$ **(تكامل)**

$= \frac{٢}{٣٥}ع^٣[٥ع^٤ + ١٤ع^٢ + ٧٠] + ث$ **(عامل مشترك)**

$= \frac{٢}{٣٥}(س-١)^{\frac{٣}{٢}}\ [٥(س-١)^٢ + ١٤(س-١) + ٧٠] + ث$ **(التعويض عن ع)**

$= \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(س-١)^٣}\ (٥س^٢ + ٤س + ٦١) + ث$

؟ حاول أن تحل

(٣) أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int س(٢س-٣)^٤\ ءس$ (ب) $\int س^٢\sqrt{٢س+١}\ ءس$

مثال

التكامل بالتعويض

(٤) أوجد:

(أ) $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\ ءس$ (ب) $\int ٦س\ هـ^{س^٢}\ ءس$

الحل

(أ) بوضع $ع = ١ + \sqrt{س}$ $\therefore$ $\sqrt{س} = ع - ١$ ، $س = (ع-١)^٢$

$ءس = ٢(ع-١)\ ءع$

$\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\ ءس = \int \sqrt{\frac{ع}{(ع-١)^٢}} \times ٢(ع-١)\ ءع$ **(بالتعويض)**

$= \int ٢ع^{\frac{١}{٢}}\ ءع = ٢ \times \frac{٢}{٣}ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$ **(بالتكامل)**

$= \frac{٤}{٣}\sqrt{(١+\sqrt{س})^٣} + ث$ **(بالتعويض عن ع)**

(ب) بوضع $ع = س^٢$ $\therefore$ $ءع = ٢س\ ءس$

$\int ٦س\ هـ^{س^٢}\ ءس = ٣\int هـ^{س^٢}(٢س\ ءس)$

$= ٣\int هـ^ع\ ءع = ٣هـ^ع + ث$ **(التعويض والتكامل)**

$= ٣هـ^{س^٢} + ث$ **(بالتعويض عن ع)**

حاول أن تحل

(٤) أوجد :

(أ) $\int \frac{س}{\sqrt{١ - ٣س^{٢}}}$ ءس   (ب) $\int (٣ - س)$ هـ$^{٦س - س^{٢}}$ ءس

مثال

التكامل بالتعويض

(٥) أوجد

(أ) $\int \frac{٥س}{٣س^{٢} - ١}$ ءس   (ب) $\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س}$ ءس

الحل

(أ) بوضع ع = $٣س^{٢} - ١$ ءع = ٦س ءس

$\int \frac{٥س}{٣س^{٢} - ١}$ ءس $= \frac{٥}{٦} \int \frac{٦س ءس}{٣س^{٢} - ١} = \frac{٥}{٦} \int \frac{١}{ع}$ ءع   (التعويض)

$= \frac{٥}{٦}$ لو$_{هـ}$ |ع| + ث $= \frac{٥}{٦}$ لو$_{هـ}$ |$٣س^{٢} - ١$| + ث   (التكامل والتعويض)

(ب) بوضع ع = لو$_{هـ}$ س   ∴ ءع = $\frac{١}{س}$ ءس

$\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س}$ ءس $= \int \sqrt{لو_{هـ} س}\ (\frac{١}{س}$ ءس$) = \int ع^{\frac{١}{٢}}$ ءع   (بالتعويض)

$= \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

$= \frac{٢}{٣} [لو_{هـ} (س)]^{\frac{٣}{٢}}$ + ث   (بالتكامل والتعويض)

حاول أن تحل

(٥) أوجد :

(أ) $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{٢س} + ٣}$ ءس   (ب) $\int \frac{١}{س(لو_{هـ} س)^{٢}}$ ءس

تفكير ناقد: باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

١- $\int [د(س)]^{ن}$ دَ(س) ءس $= \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن + ١}$ + ث   حيث ن ≠ -١

٢- $\int \frac{دَ(س)}{د(س)}$ ء(س) = لو$_{هـ}$ |د(س)| + ث   حيث د(س) ≠ ٠

التكامل بالتجزئ *Integration by Parts*

إذا كانت ص ، ع دالتين في المتغير س وقابلتين للإشتقاق، فإن:

$\frac{ء}{ءس}$ (ص ع) = ص $\frac{ءع}{ءس}$ + ع $\frac{ءص}{ءس}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$\int \frac{ء}{ءس}$ (ص ع) ءس = $\int$ ص $\frac{ءع}{ءس}$ ءس + $\int$ ع $\frac{ءص}{ءس}$ ءس

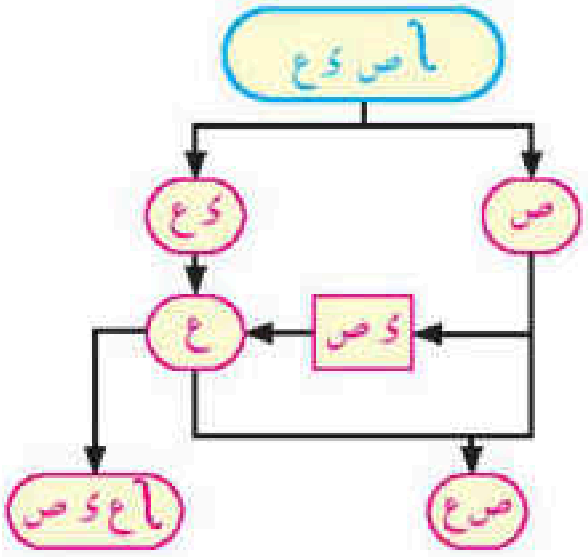
تذكر أن

ءع = $\frac{ءع}{ءس}$ ءس

ءص = $\frac{ءص}{ءس}$ ءس

$$\text{ص ع} = \int \text{ص ء ع} + \int \text{ع ء ص}$$

أى أن: $\int \text{ص ء ع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ء ص}$



تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزيء ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى، ذلك باختيار مناسب لكل من ص ، ع بحيث يمكن حساب التكامل بالطرف الأيسر بطريقة أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن، وتتبع المخطط المقابل كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال

التكامل بالتجزئ

٦ أوجد:

أ $\int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$ ب $\int \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$

الحل

أ لإيجاد $\int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$:

نفرض أن: ص = س ،   ء ع = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ء س

∴ ء ص = ء س   ع = $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\because \int \text{ص ء ع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ء ص}$$

$$\therefore \int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث} = \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - 1) + \text{ث}$$

ملاحظة هامة: إضافة ثابت إلى الدالة ع لا يغير من النتيجة (أثبت ذلك)

ب لإيجاد $\int \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$:

نفرض أن: ص = س^2 ،   ء ع = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ء س

ء ص = ٢س ء ص   ع = $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\int \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} - \int 2\text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$$

$$= \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} - 2 \int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س}$$

$$\boxed{\int \text{س هـ}^{\text{س}} \text{ ء س} = \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - 1) + \text{ث من أ}}$$

$$= \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}} - 2 \, \boxed{\text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - 1)} + \text{ث}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} [\text{س}^2 - 2\text{س} + 2] + \text{ث}$$

حاول أن تحل

٦ أوجد :

أ $\int \text{س هـ}^{-2\text{س}} \text{ ء س}$ ب $\int \text{س}^2 \text{ هـ}^{\text{س}^3 + 2} \text{ ء س}$

لاحظ أن:

إختيار ص ، ءع يتوقف على:

١- ء ص أبسط من ص　　**٢-** ء ع اسهل فى التكامل

مثال
تكامل بالتجزىء

٧ أوجد

أ) $\int$ لوهـ س ء س　　ب) $\int$ س لوهـ س ء س

الحل

أ) **بفرض أن :** ص = لوهـ س　　ء ع = ء س

ء ص = $\frac{١}{س}$ ء س　→　ع = $\int$ ء س = س

$\int$ لوهـ س ء س = س لوهـ س - $\int$ س × $\frac{١}{س}$ ء س

= س لوهـ س - س + ث = س (لوهـ س -١) + ث

ب) **نفرض أن:** ص = لوهـ س　　ء ع = س ء س

ء ص = $\frac{١}{س}$ ء س　→　ع = $\int$ س ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

$\int$ س لوهـ س ء س = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} لوهـ س - $\int$ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} × $\frac{١}{س}$ ء س

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} لوهـ س - $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ث = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (لوهـ س - $\frac{١}{٢}$) + ث

حاول أن تحل

٧ أوجد :

أ) $\int$ لوهـ (س + ١) ء س　　ب) $\int$ (لوهـ س ÷ $\sqrt{س}$) ء س

مثال
تكامل بالتجزئ

٨ أوجد:

أ) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ ء س　　ب) $\int \frac{\text{س}^{٤}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$ ء س

الحل

أ) لاحظ أن (س + ١)$^{-٢}$ أسهل فى التكامل

بوضع ص = س هـ$^{\text{س}}$　　ء ع = (س + ١)$^{-٢}$ ء س

ء ص = (س هـ$^{\text{س}}$ + هـ$^{\text{س}}$) ء س　→　ع = $\frac{-١}{\text{س}+١}$

$\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ ء س = - $\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}$ - $\int \frac{-١}{\text{س}+١}$ × هـ$^{\text{س}}$ (س + ١) ء س

$$= -\frac{س\,هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}\,ءس$$

$$= \frac{-س\,هـ^{س} + هـ^{س}(س+١)}{س+١} + ث = \frac{هـ^{س}}{س+١} + ث$$

ب بوضع $ص = ٤س$ ، $ءص = ٤\,ءس$

$ءع = (٢س+١)^{-\frac{١}{٣}}\,ءس$ ، $ع = \frac{٣}{٢\times٢}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}$

$$\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}}\,ءس = ٣س\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \int \frac{٣}{٤}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} \times ٤\,ءس$$

$$= ٣س\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣\times٣}{٢\times٥}\,(٢س+١)^{\frac{٥}{٣}} + ث$$

$$= \frac{٣}{١٠}\,(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}\left[١٠س - ٣\,(٢س+١)\right] + ث$$

$$= \frac{٣}{١٠}(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}\,(٤س-٣) + ث$$

حاول أن تحل

٨ أوجد :

أ $\int \frac{٣س+٥}{هـ^{٣س}}\,ءس$ ب $\int \frac{س}{\sqrt{٢س+٣}}\,ءس$

تفكير ناقد: هل يمكنك إيجاد $\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}}\,ءس$ بطريقة التكامل بالتعويض؟ فسر إجابتك.

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

إذا علمنا أن الدالة ر تعطي ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة د فإنه يمكن أن نعرف الدالة ت من عملية التكامل غير المحدد للدالة ر حيث: $د(س) = \int ر(س)\,ءس$

يلاحظ أن هذا التكامل لا يعطي دالة وحيدة إذ يحتوي على ثابت اختياري يمكن تحديده من البيانات المعطاة.

مثال
معادلة منحنى دالة

٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س ، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة $ر(س) = \frac{س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ) .

الحل

بفرض أن معادلة منحنى الدالة هي ص = د(س) $\therefore د(س) = \int ر(س)\,ءس$

$\therefore د(س) = \int \frac{س\,هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\,ءس = \frac{هـ^{س}}{س+١} + ث$ [من حل مثال ٨ (أ)]

$\because$ منحني د يمر بالنقطة (١ ، ٢ هـ) فهي تحقق معادلة $\therefore ٢هـ = \frac{هـ}{(١+١)} + ث$

$\therefore ث = \frac{٣}{٢}هـ$ وتكون $د(س) = \frac{هـ^{س}}{س+١} + \frac{٣}{٢}هـ$

حاول أن تحل

٩ أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى $س\sqrt{س^{٢}+١}$

تمـارين ٣ - ٢

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ $\int س(س^{٢}+٣)^{٥}$ ء س يساوى

(أ) $\frac{١}{٦}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ (ب) $\frac{١}{١٢}(س^{٢}+٣)^{٦}+ث$ (ج) $\frac{١}{٤}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$ (د) $\frac{١}{٨}(س^{٢}+٣)^{٤}+ث$

٢ إذا كان $\int(٢س+٣)\,لو_{هـ}س$ ء س = ص ع - $\int$ ع ء ص فإن ص ع يساوى

(أ) $٢س\,لو_{هـ}س$ (ب) $(٢س+٣)\,لو_{هـ}س$ (ج) $\frac{١}{٢}(٢س+٣)\,لو_{هـ}س$ (د) $س(س+٣)\,لو_{هـ}س$

٣ إذا كان $\int(٢س-١)\,هـ^{٢س+٣}$ ء س = ص ع - $\int$ ع ء ص فإن $\int$ ع ء ص

(أ) $هـ^{٢س+٣}+ث$ (ب) $\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$ (ج) $-هـ^{٢س+٣}+ث$ (د) $-\frac{١}{٢}هـ^{٢س+٣}+ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية:

٤ $\int س(س-٢)^{٤}$ ء س

٥ $\int س^{٢}(س-٢)^{٣}$ ء س

٦ $\int س^{٣}(س^{٢}-١)^{٥}$ ء س

٧ $\int س\sqrt{س+٤}$ ء س

٨ $\int(س^{٢}-١)\sqrt{س+١}$ ء س

٩ $\int س^{٥}(س^{٢}+٣)^{٤}$ ء س

١٠ $\int\frac{س}{٣س^{٢}+٢}$ ء س

١١ $\int\frac{س}{س+١}$ ء س

١٢ $\int\frac{س+١}{\sqrt{س-١}}$ ء س

١٣ $\int\frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}$ ء س

١٤ $\int س\,هـ^{-س^{٢}}$ ء س

١٥ $\int\frac{هـ^{-س}-١}{هـ^{-س}+س}$ ء س

١٦ $\int لو_{هـ}٥س\,\frac{ء س}{س}$

١٧ $\int(لو_{هـ}س)^{٣}\,\frac{ء س}{س}$

١٨ $\int\frac{١}{س\,لو_{هـ}س}$ ء س

باستخدام التجزىء المناسب أوجد التكاملات الآتية:

١٩ $\int ٤س\,هـ^{٢س}$ ء س

٢٠ $\int س^{٣}هـ^{س^{٢}}$ ء س

٢١ $\int\frac{س}{هـ^{٢س}}$ ء س

٢٢ $\int س^{٣}\,لو_{هـ}س$ ء س

٢٣ $\int لو_{هـ}س^{٢}$ ء س

٢٤ $\int(لو_{هـ}س)^{٢}$ ء س

٢٥ $\int لو_{هـ}س\,\frac{ء س}{س^{٣}}$

٢٦ $\int(س+١)^{٢}هـ^{٢س}$ ء س

٢٧ $\int س(لو_{هـ}س)^{٢}$ ء س

أجب عن ما يأتى:

٢٨ أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة أ (٢ ، ٣)، وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س ، ص) هو ٣- س.

٢٩ اذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو $س\sqrt{س+١}$ أوجد معادلة المنحنى علمًا بأن المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، \frac{١١}{١٥})$

٣٠ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ = أ س + ب حيث أ ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٠ ، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى.

٣ - ٣ التكامل المحدد

The Definite Integral

فكر و ناقش

إذا كانت ص = د(س) ، وميل المماس عند أى نقطة (س، ص) على منحنى الدالة د هو:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{دَ}(\text{س}) = ٢\,\text{س} + ٣$$

هل يمكنك تعيين قيمة محددة لكل من د(٣)، د(٥) ، د(٥) - د(٣) ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

١ من تعريف التكامل غير المحدد:

$$\text{ص} = \int \text{دَ}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$$

حيث ث مقدار ثابت إختيارى لا يتوقف على س ومن الضرورى الاحتفاظ به فى التكامل حتى يكون شاملاً لجميع الدوال التى معدل تغيرها هو د(س) وعلى ذلك فإن التكامل غير المحدد لاينتج قيمة محددة تناظر قيمة معينة للمتغير س.

٢ إذا كانت قيمة التكامل عند س = أ هى د(أ) + ث

وقيمته عند س = ب هى د(ب) + ث

∴ الفرق بين قيمتى التكامل عند س = أ ، س = ب

يساوى د(ب) - د(أ) وهو قيمة معينة (مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث) ويرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{دَ}(\text{س})\,\text{ءس}$ حيث :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{دَ}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{د}(\text{ب}) - \text{د}(\text{أ})$$

وتعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد.

سوف تتعلم

- مفهوم التكامل المحدد.
- استخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل لإيجاد التكامل المحدد.
- بعض خواص التكامل المحدد.

المصطلحات الأساسية

- تكامل محدد *Definite Integral*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

تعلم

النظرية الأساسية فى التفاضل Foundamental Theorem of Calculus

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = ت(ب) - ت(أ)$$

ملاحظات:

١ يسمى $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ بالتكامل المحدد، و يقرأ تكامل د(س) بالنسبة إلى س من أ إلى ب، وهو عدد حقيقى تتوقف قيمته على:

(أ) الحدان السفلى والعلوى للتكامل المحدد أى على العددين أ، ب على الترتيب.

(ب) قاعدة الدالة د

أما رمز المتغير س فيمكن استبداله بأى رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل، أى أن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} د(ص)\, ءص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\, ءع \; ......$$

ولذلك نكتب أحيانًا

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} د$$

٢ يعبر عن ت(ب) - ت(أ) بالصورة $[ت(س)]_{أ}^{ب}$ أو $ت(س) \Big|_{أ}^{ب}$

٣ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل (لماذا)؟ ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل.

٤ تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة، فإذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب]

فإن:

- $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm ر(س)]\, ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\, ءس$
- $\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث $ك \in ح$

مثال حساب قيمة تكامل محدد

(١) أوجد التكامل المحدد للدالة د من س = -٢ إلى س = ٤ حيث د(س) = ٣س^{٢} - ٢

الحل

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على ع

$\therefore \int_{-٢}^{٤} (٣س^{٢} - ٢)\, ء س = [س^{٣} - ٢س]_{-٢}^{٤}$

$= [(٤)^{٣} - ٢(٤)] - [(-٢)^{٣} - (-٤)]$

$= ٦٤ - ٨ + ٨ - ٤ = ٦٠ \in ع$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\, ء س$ (ب) $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}\, ء ن$ (جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\, \theta\, ء\, \theta$

> **نظرية** إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

تفكير ناقد

ما الفرق بين التكامل المحدد والمتكامل غير المحدد؟ فسر إجابتك.

خواص التكامل المحدد
Properties of Definite Integral

إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب]، جـ $\in$] أ، ب [، فإن:

١- $\int_{ب}^{أ} د(س)\, ء س = - \int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س$

٢- $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ء س = ٠$

٣- $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ء س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ء س$

مثال — حساب قيمة تكامل محدد

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{١}^{٣} د(س)\, ء س = ٦$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س) = -١٤$ أوجد $\int_{١}^{٥} د(س)\, ء س$

الحل

$\because$ د متصلة على ع ، س = ٣ تجزىء الفترة [١، ٥]

$\therefore \int_{١}^{٥} د(س)\, ء س = \int_{١}^{٣} د(س)\, ء س + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ء س$ **خاصية (٣)**

$= \int_{١}^{٣} د(س)\, ء س - \int_{٥}^{٣} د(س)\, ء س$ **خاصية (١)**

$= ٦ - (-١٤) = ٢٠$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت د دالة متصلة على ع، $\int_{-١}^{٤} د(س)\, ء س = ٢٥٥$، $\int_{٢}^{-١} د(س)\, ء س = -١٥$ فأوجد: $\int_{٢}^{٤} د(س)\, ء س$

مثال حساب قيمة تكامل محدد

٣ أوجد $\int_{٠}^{٥} |\text{س} - ٣| \, \text{ء س}$

الحل

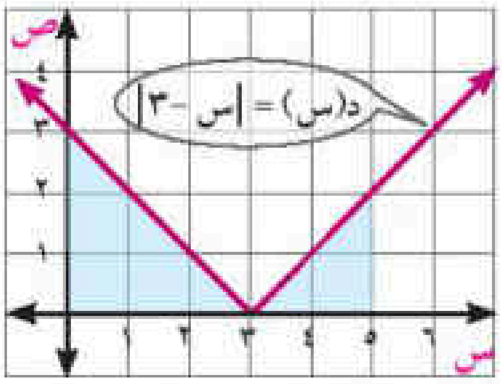
من تعريف دالة المقياس نجد أن $|\text{س} - ٣| = \begin{cases} -(\text{س} - ٣) & \text{عندما س} < ٣ \\ \text{س} - ٣ & \text{عندما س} \geqslant ٣ \end{cases}$ ، د متصلة عند س = ٣

$\int_{٠}^{٥} |\text{س} - ٣| \, \text{ء س} = \int_{٠}^{٣} |\text{س} - ٣| \, \text{ء س} + \int_{٣}^{٥} |\text{س} - ٣| \, \text{ء س}$

$= \int_{٠}^{٣} (٣ - \text{س}) \, \text{ء س} + \int_{٣}^{٥} (\text{س} - ٣) \, \text{ء س}$

$= \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - ٣\text{س}\right]_{٣}^{٥}$

$= (٩ - \frac{٩}{٢}) + (\frac{٢٥}{٢} - ١٥ - \frac{٩}{٢} + ٩) = \frac{١٣}{٢}$



لاحظ أن المساحة الملونة تساوى $\frac{١٣}{٢}$ وحدة مربعة

حاول أن تحل

٣ أوجد:

أ $\int_{-٤}^{٢} |\text{س} + ١| \, \text{ء س}$ ب $\int_{-٣}^{٣} |\text{س}^٢ - ٤| \, \text{ء س}$

مثال حساب قيمة تكامل محدد بالتعويض

٤ أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣} \text{س} \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{ء س}$

الحل

يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد أولًا، ثم التعويض عن المتغير س بحدى التكامل:

أولًا:

لإيجاد $\int \text{س} \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{ء س}$ نضع ع = $\text{س}^٢ + ٣$ $\therefore$ ء ع = ٢س ء س

$\therefore \int \text{س} \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{ء س} = \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \, (٢\text{س ء س}) = \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{ع}} \, \text{ء ع}$ **(تعويض)**

$= \frac{١}{٢} \int \text{ع}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ء ع} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ **(تكامل)**

$= \frac{١}{٣} \sqrt{(\text{س}^٢ + ٣)^٣} + \text{ث}$ **(تعويض عن ع)**

ثانيًا:

$\int_{٠}^{٣} \text{س} \sqrt{\text{س}^٢ + ٣} \, \text{ء س} = \left[\frac{١}{٣} \sqrt{(\text{س}^٢ + ٣)^٣}\right]_{٠}^{٣}$

$\frac{١}{٣} \left[\sqrt{(١٢)^٣} - \sqrt{(٣)^٣}\right] = ٧\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

٤ أوجد:

أ) $\int_{٠}^{٥}$ س $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ء س   ب) $\int_{-٢}^{٢}$ $س^{٣}$ $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ ء س

لاحظ أن

١- يمكن حل مثال ٤ مباشرة بإيجاد قيم ع المناظرة لقيم حدى المتكامل (س = ٠ ، س = ٣)

عند س = ٠ ∴ ع = ٣ ، عند س = ٣ ع = ١٢

∴ $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ ء س $= \frac{١}{٢} \int_{٣}^{١٢} ع^{\frac{١}{٢}}$ ء س $= \left[\frac{١}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٣}^{١٢}$

$= \frac{١}{٣}\left[\sqrt{(١٢)^{٣}} - \sqrt{(٣)^{٣}}\right] = ٧\sqrt{٣}$

٢- في بند **حاول أن تحل** ٤ ب: د(س) = $س^{٣}$ $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ **دالة فردية**

وفي بند **حاول أن تحل** ٣ب: د(س) = $|س^{٢} - ٤|$ **دالة زوجية**

للدوال الفردية والدوال الزوجية في التكامل المحدد الخواص التالية:

> **١-** إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $\int_{-أ}^{أ}$ د(س) ء س = صفرًا
>
> **٢-** إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-أ ، أ] فإن:
>
> $\int_{-أ}^{أ}$ د(س) ء س = ٢ $\int_{٠}^{أ}$ د(س) ء س

باستخدام الخواص السابقة تحقق من صحة إجابتك في حاول أن تحل ٣، ٤

مثال **التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية**

٥ أوجد:

أ) $\int_{-٢}^{٢} \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١}$ ء(س)   ب) $\int_{-٢}^{٢}$ $(س^{٢} - ١)$ ء س

الحل

أ) د دالة متصلة على ح

∵ د(-س) $= \frac{(-س)^{٣} - ٣(-س)}{(-س)^{٢} + ١} = - \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١} = -$ د(س)

∴ **د دالة فردية ويكون:** $\int_{-٢}^{٢} \frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} + ١}$ = صفر

(ب) د دالة كثيرة الحدود متصلة على ح

∵ $د(-س) = (-س)^{٢} - ١ = س^{٢} - ١ = د(س)$

∴ د دالة زوجية ويكون: $\int_{-٣}^{٣} (س^{٢} - ١) \, ى س = ٢ \int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ١) \, ى س$

$= ٢ \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - س\right]_{٠}^{٣} = ٢ \times ٦ = ١٢$

حاول أن تحل

(٥) أوجد

(أ) $\int_{-٣}^{٣} \frac{س}{١ + س^{٢}} \, ى س$

(ب) $\int_{-\pi}^{\pi} (٤ + \pi \, جتا \, ٢س) \, ى س$

تفكير ناقد

١ إذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة [-٣ ، ٥] ، $\int_{٢}^{٥} د(س) \, ى س = ٩$ ما قيمة $\int_{-٣}^{٥} د(س) \, ى س$ ؟

٢ إذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [-٤، ٤] ، $\int_{-٤}^{٤} د(س) \, ى س = ٢٠$
$\int_{٠}^{٢} د(س) \, ى س = ٦$ ، ما قيمة $\int_{-٤}^{٢} د(س) \, ى س$ ؟

تمارين ٣-٣

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ء س = ١٢، $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ء س = ١٦ فإن $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س يساوي:

أ -٢٨ ب -٤ ج ٤ د ٢٨

(٢) إذا كانت د(س) = |س|، فإن $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ء س يساوي:

أ -١ ب صفر ج ٢ د ٤

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(٣) $\int_{-١}^{٢}$ $س^{٣}$ ء س

(٤) $\int_{١}^{٣}$ (٣$س^{٢}$ - ٢) ء س

(٥) $\int_{٠}^{٤}$ $(٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ ء س

(٦) $\int_{٤}^{٠}$ $\frac{ء ن}{\sqrt{٨ - ن}}$

(٧) $\int_{٠}^{٢}$ س$(س^{٢} - ٣)^{٢}$ ء س

(٨) $\int_{٠}^{٢}$ $س^{٢}$ $\sqrt{س^{٣} + ١}$ ء س

(٩) $\int_{-١}^{٣}$ |س - ١| ء س

(١٠) $\int_{-٤}^{٠}$ س $(س + ٤)^{٢}$ ء س

(١١) $\int_{-١}^{٣}$ س $\sqrt{س + ١}$ ء س

(١٢) $\int_{٠}^{١}$ ٢ جا πع ء ع

(١٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ ظا ع $قا^{٢}$ ع ء ع

(١٤) $\int_{٠}^{٣}$ (٢س - ٧$هـ^{س}$) ء س

أجب عن ما يأتي:

(١٥) إذا كان $\int_{١}^{٥}$ د(س) ء س = ١٠، $\int_{١}^{٥}$ ر(س) ء س = -٢ احسب قيمة

أ $\int_{١}^{٥}$ [د(س) + ر(س)] ء س ب $\int_{١}^{٥}$ [د(س) - ر(س)] ء س ج $\int_{٥}^{١}$ ٣ ر(س) ء س

(١٦) إذا كان د دالة متصلة على الفترة [-٤ ، ٤]، $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س = ٣ ، احسب قيمة

أ $\int_{٠}^{٤}$ [د(س) + ٢] ء س ب $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س ، د فردية ج $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س، د زوجية

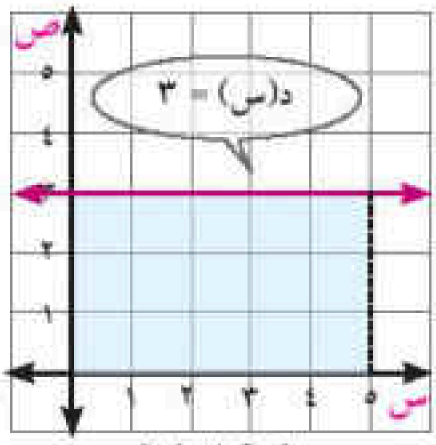
(١٧) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ س & \text{عندما } س \geqslant ٢ \end{cases}$ أوجد $\int_{٠}^{٦}$ د(س) ء س

٣ - ٤ تطبيقات على التكامل المحدد

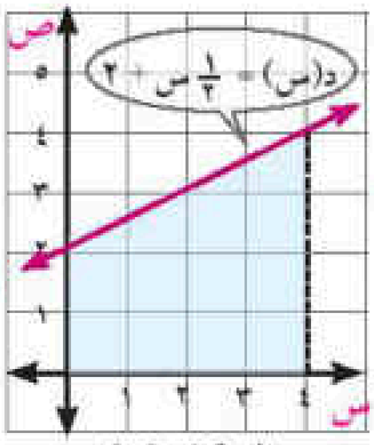
أولا: المساحات في المستوى

فكر و ناقش

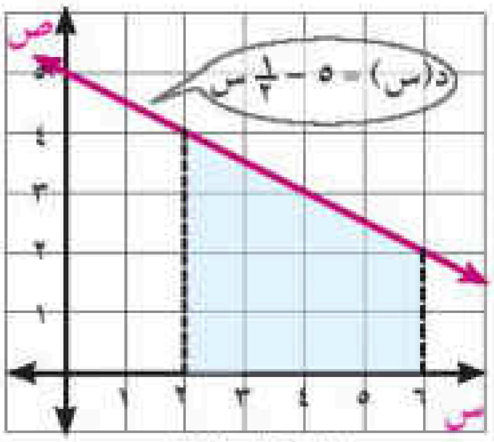
١- احسب المساحة الملونة فى كل من الأشكال التالية هندسيًا.



الشكل (١)



الشكل (٢)



الشكل (٣)

٢- لكل من الأشكال السابقة احسب $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س حيث د(س) معادلة المنحنى، والمستقيمان س = أ ، س = ب يحدان المنطقة الملونة.

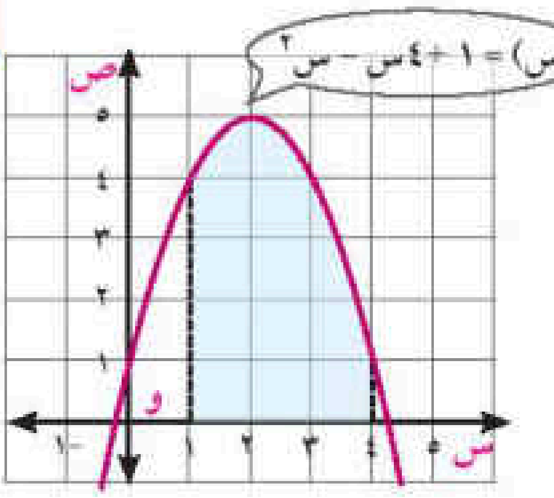
٣- قارن بين مساحة كل شكل وناتج التكامل المحدد له، ماذا تستنتج؟

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ، ب]

> **نظرية**
>
> إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:
>
> م = $\int_{أ}^{ب}$ |د(س)| ء س

مثال المساحة تحت المنحنى

① يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ١ + ٤س - س^{٢} أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = ٤



سوف تتعلم

- التعرف على المساحة كتكامل محدد.
- إيجاد المساحة المحددة بمنحنى دالة و محور السينات على فترة مغلقة.
- إيجاد حجم دورانى ناتج عند دوران منطقة محددة بمنحنيين حول محور السينات.

المصطلحات الأساسية

- مساحة Area
- وحدة مربعة Unite Squared
- محور الدوران Axis of Revolution
- مجسم دورانى Solid of Revolution

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسب الآلى

الحل

د متصلة على الفترة $[1, 4]$ ، $\text{د}(\text{س}) > 0$ لكل $\text{س} \in [1, 4]$

$\therefore \text{م} = \int_{1}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} \qquad = \int_{1}^{4} (1 + 4\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ءس}$

$= \left[\text{س} + 2\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{1}^{4} = \left[4 + 32 - \frac{64}{3}\right] - \left[1 + 2 - \frac{1}{3}\right]$

$= 36 - \frac{64}{3} - 3 + \frac{1}{3} = 12$ وحدة مربعة

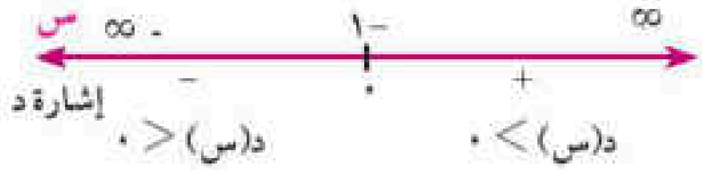
حاول أن تحل

(١) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -1$، $\text{س} = 2$ حيث $\text{د}(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 1$

مثال المساحة فوق محور السينات ومنحنى دالة

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[3]{2\text{س} + 2}$ والمستقيم $\text{س} = 3$ وفوق محور السينات.

الحل



نوجد أصفار الدالة بوضع $\text{د}(\text{س}) = 0$

$\therefore \sqrt[3]{2\text{س} + 2} = 0$ أي أن: $\text{س} = -1$

$\therefore$ المساحة المطلوبة $\text{م} = \int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$

$= \int_{-1}^{3} (2\text{س} + 2)^{\frac{1}{3}}\, \text{ءس} = \left[\frac{3}{4 \times 2}(2\text{س} + 2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{3}$

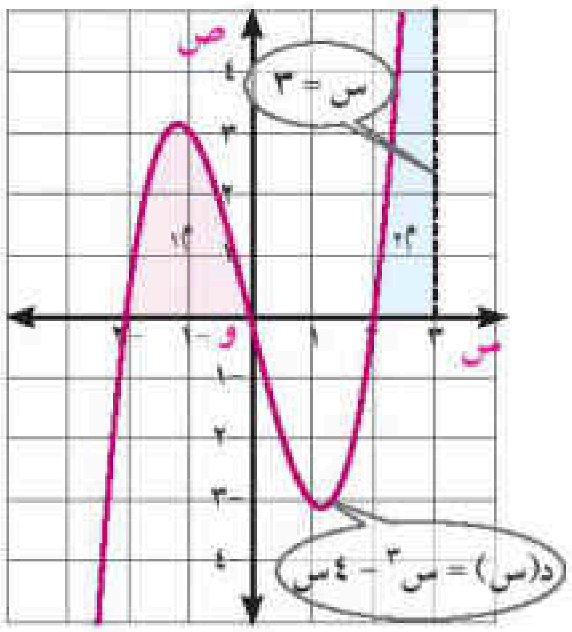
$= \frac{3}{8}\left[8^{\frac{4}{3}} - 0\right] = \frac{3}{8}(2^4)^{\frac{4}{3}} = 6$ وحدات مربعة

حاول أن تحل

(٢) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \frac{4\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$ والمستقيم $\text{س} = 4$ وتقع فوق محور السينات.

مثال المساحة بين منحنى ومحور السينات

(٣) إذا كانت د: $]-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - 4\text{س}$ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات.



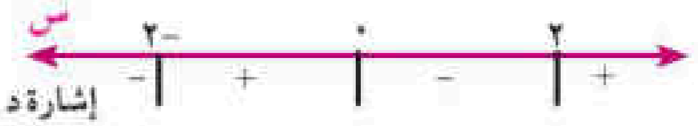
الحل

نوجد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (أصفار الدالة)

د(س) = $\text{س}^{٣}$ - ٤س = س($\text{س}^{٢}$ - ٤) = س (س - ٢) (س + ٢)

عندما د(س) = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ٢ أو س = -٢

بدراسة إشارة الدالة د نجد



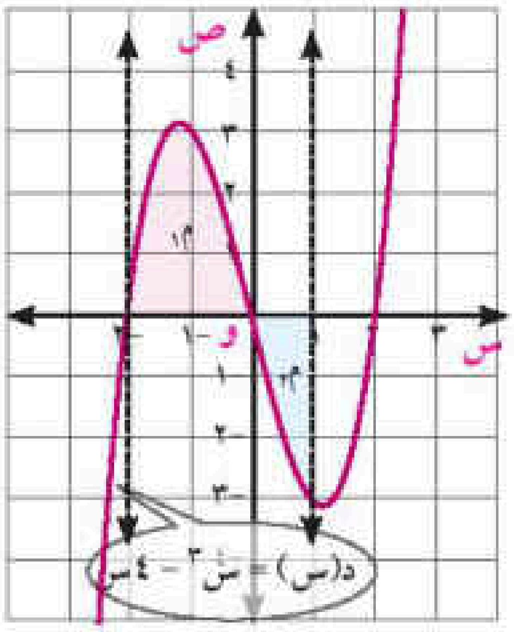
د(س) ⩽ ٠ على الفترة [-٢، ٠] وعلى الفترة [٢، ٣]

∴ المساحة م = م١ + م٢ = $\int_{-٢}^{٠}$ ($\text{س}^{٣}$ + ٤س) ءس + $\int_{٢}^{٣}$ (س٣ - ٤س) ءس

= $[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}]_{-٢}^{٠}$ + $[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}]_{٢}^{٣}$

= (٠ - (-٤)) + ($\frac{٨١}{٤}$ - ١٨ - (-٤))

= $\frac{١٢١}{٤}$ وحدة مربعة



ملاحظة هامة

لتعيين المساحة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١ كما فى الرسم المقابل.

نجد أن:

د(س) ⩽ ٠ عندما س ∈ [-٢، ٠] ، د(س) > ٠ عندما س ∈ [٠، ١]

∴ المساحة م = م١ + م٢

= $\int_{-٢}^{٠}$ ($\text{س}^{٣}$ - ٤س) ءس + | $\int_{٠}^{١}$ ($\text{س}^{٣}$ - ٤س) ءس |

= $[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}]_{-٢}^{٠}$ + | $[\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}]_{٠}^{١}$ |

= ٤ + |($\frac{١}{٤}$ - ٢) - ٠ | = ٤ + | -$\frac{٧}{٤}$ | = $\frac{٢٣}{٤}$ وحدة مربعة.

حاول أن تحل

(٣) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - $\text{س}^{٢}$ ومحور السينات.

تفكير ناقد

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س - $\text{س}^{٢}$ والمستقيمات س = -١، س = ٤ ، ص = ٠

مثال — تطبيقات معمارية للمساحة

④ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته ص = - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧) حيث س بالأمتار فإذا غُطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه كم تكون تكلفة الزجاج؟

الحل

نمذجة المسألة:

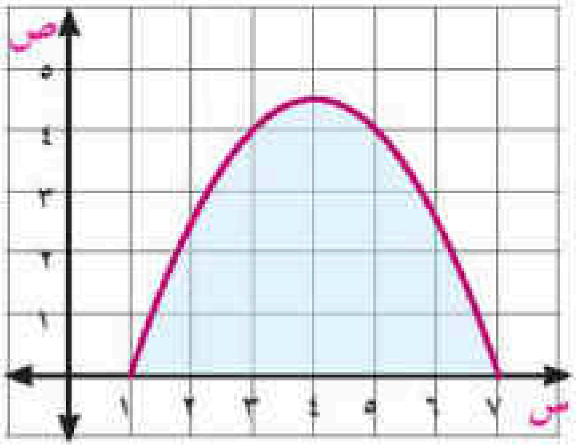
تكاليف زجاج مدخل الفندق = مساحة الزجاج بالأمتار المربعة × تكلفة المتر المربع الواحد

بفرض أن التكاليف الكلية ك جنيهًا ، مساحة الزجاج م متر مربع

∴ ك = ١٥٠٠ م ①

إيجاد مساحة الزجاج:

باعتبار المستوى الأفقى محورًا للسينات معادلته ص = ٠ ومعادلة قوس مدخل الفندق ص = د(س) حيث:



د(س) = - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧)

∴ عند د(س) = ٠ فإن: س = ١ أو س = ٧

فتكون د(س) ⩾ ٠ لكل س ∈ [١ ، ٧]

المساحة م = $\int_{١}^{٧}$ - $\frac{١}{٢}$ (س - ١) (س - ٧) ء س = $\int_{١}^{٧}$ (- $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤س - $\frac{٧}{٢}$) ء س

= $[$ - $\frac{١}{٦}$س^{٣} + ٢س^{٢} - $\frac{٧}{٢}$س $]_{١}^{٧}$ = $\frac{٤٩}{٣}$ - (- $\frac{٥}{٣}$) = ١٨ ②

من ①، ②

∴ ك = ١٥٠٠ × ١٨ = ٢٧٠٠٠

أى أن: تكلفة تغطية مدخل الفندق بالزجاج تساوى ٢٧٠٠٠ جنيه

حاول أن تحل

④ إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د، والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث د(س) = ١٢ - $\frac{١}{٣}$ س^{٢}. **أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.**

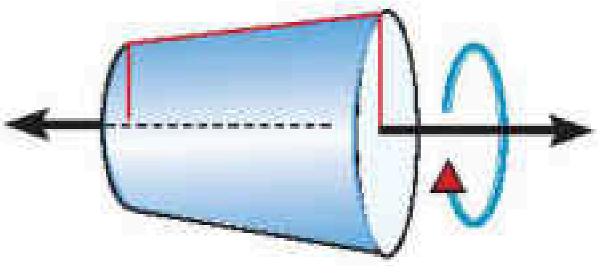
ثانيًا: حجوم الأجسام الدورانية

فكر و ناقش

هل شاهدت صانع الفواخير وهو يحول التراب إلى تحف وأوانى طهى طعام بخلط الطين الأسوانى بالماء وتقطيعه ووضعه حول محور يدور؛ فيشكله بأصابعه وأدواته؛ لينتج أجسامًا ذات أشكال جذابة. بما تسمى هذه الأجسام؟

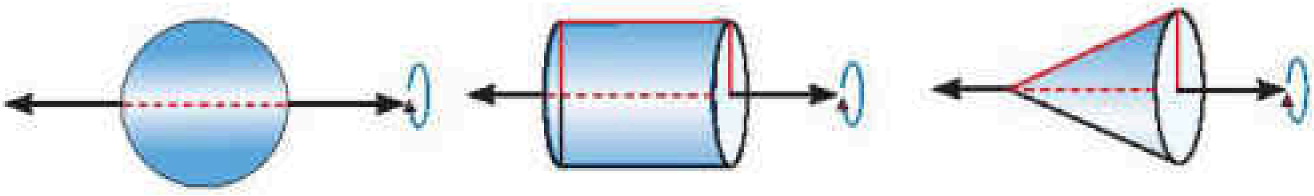
- تصمم العبوات البلاستيكية لتعبئة المياة الغازية والعصائر والزيوت بأحجام مختلفة وسعات متعددة. كيف يمكن حساب حجمها أو سعتها عند تصميمها؟

المجسم الدورانى *Solid of Revolution*



ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى «محور الدوران».

توضح الأشكال التالية أمثلة لمجسمات دورانية ترسمها المساحة م عند دورانها دورة كاملة حول المستقيم ل



كرة

أسطوانة قائمة

مخروط قائم

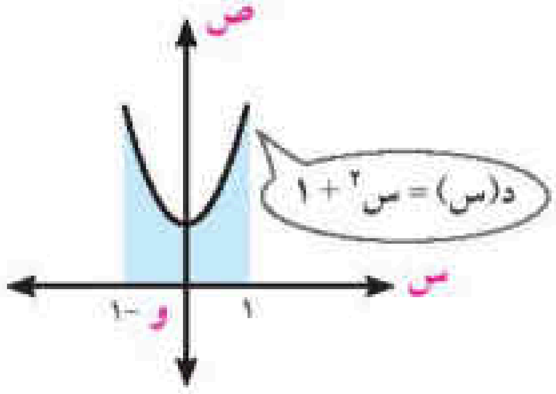
حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور السينات.

نظرية

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ، ب] فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س= ب دورة كاملة حول محور السينات هو: ح = $\pi \int_{أ}^{ب}$ [د(س)]^{٢} ء س

مثال

دوران حول محور السينات



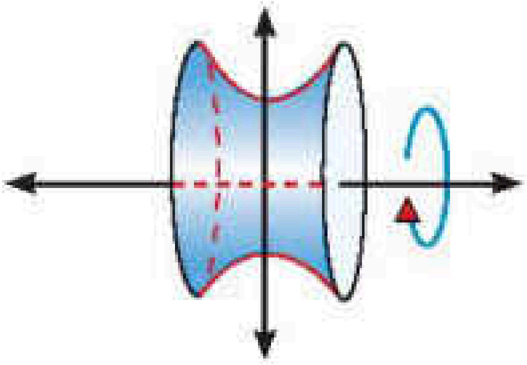
(٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١، س = ١ دورة كاملة محور السينات علمًا بأن د(س) = س^{٢} + ١

الحل:

الدالة د كثيرة الحدود متصلة على الفترة [-١، ١]،

د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ، ب]

بفرض أن حجم الجسم الناشئ من الدوران = ح



$\therefore$ ح = $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^{٢} + ١)^{٢} ء س

= $\pi \int_{-١}^{١}$ (س^{٤} + ٢س^{٢} + ١) ء س

= π [$\frac{١}{٥}$ س^{٥} + $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + س]$_{-١}^{١}$ = $\frac{٥٦}{١٥}\pi$ وحدة مكعبة

حاول أن تحل

(٥) أوجد حجم الجسم الناشء من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علمًا بأن د(س) = س ما اسم المجسم الناشئ؟ بين كيف تتحقق هندسيًّا من صحة إجابتك.

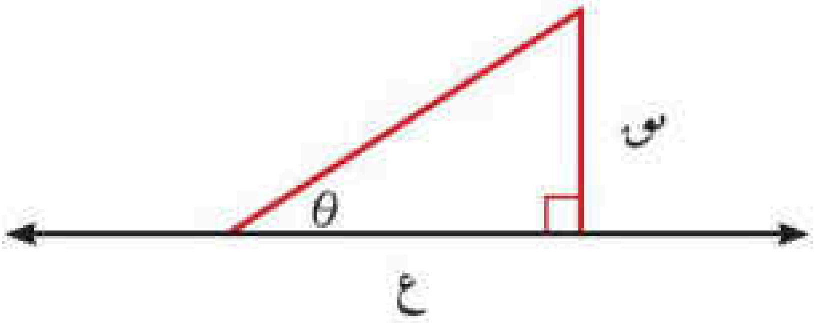
مثال

تطبيقات الحجوم

(٦) باستخدام التكامل أثبت أن حجم المخروط الدائرى القائم يساوى $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع حيث نق طول نصف قطر قاعدته، ع ارتفاعه.

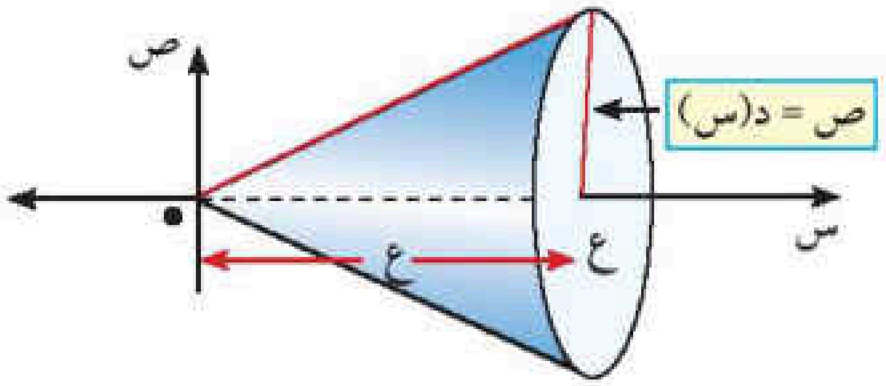
الحل:

ينتج المخروط الدائرى القائم عن دوران مثلث قائم الزاوية بحيث يقع أحد ضلعى القائمة على محور السينات دورة كاملة حول محور السينات.



نوجد العلاقة بين س ، ص = د(س)

$\text{طا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (١) $\qquad \therefore$ ص = س طا θ = د(س)



$\because$ ح = $\pi \int_{٠}^{ع} [\text{د(س)}]^{٢}$ ء س = $\pi \int_{٠}^{ع}$ س^{٢} طا$^{٢}\theta$ ء س

= $\left[\frac{\pi}{٣}\right.$ س^{٣} طا$^{٢}\theta \left.\right]_{٠}^{ع}$ = $\frac{\pi}{٣}$ ع^{٣} طا$^{٢}\theta$ (٢)

من (١) طا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}$

$\therefore$ طا$^{٢}\theta = \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}}$

بالتعويض فى (٢) $\qquad \therefore$ ح = $\frac{\pi}{٣} \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \times$ ع^{٣} = $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع

حاول أن تحل

٦ باستخدام التكامل أثبت أن:

أ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣} (نق طول نصف قطر الكرة)

ب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق^{٢} ع

(نق طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها)

تذكر أن

معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل (٠، ٠) وطول نصف قطرها (نق) هى:
س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

مثال

دوران حول محور السينات

٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ ومحور السينات، حيث أ، ب ثابتان، دورة كاملة حول محور السينات.

الحل:

$\because$ الدوران حول محور السينات $\qquad \therefore$ ص^{٢} = ب^{٢} $\left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\right)$

حدود التكامل:

ص = ٠ $\qquad \therefore$ س^{٢} = أ^{٢} $\qquad$ **أى أن** س = - أ، س = أ

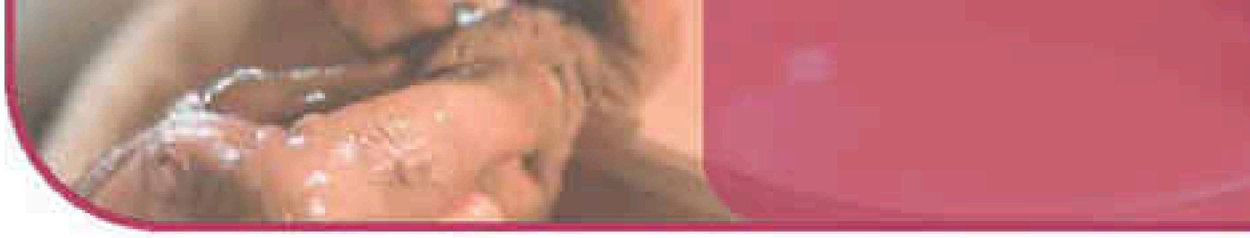
ح = $\pi \int_{-أ}^{أ}$ ب^{٢} $\left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\right)$ ء س = ٢ π ب^{٢} $\int_{٠}^{أ} \left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\right)$ ء س $\qquad$ **(لماذا؟)**

= ٢ π ب^{٢} $\left[\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣\text{أ}^{٢}}\right]_{٠}^{أ}$ = ٢ π ب^{٢} [أ - $\frac{١}{٣}$ أ]

= $\frac{٤}{٣} \pi$ ب^{٢} أ $\qquad$ وحدة مكعبة.

حاول أن تحل

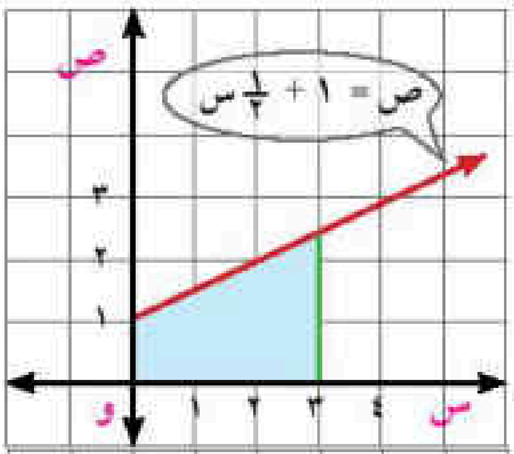
٧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢س - س^{٢} ومحور السينات، دورة كاملة حول محور السينات.



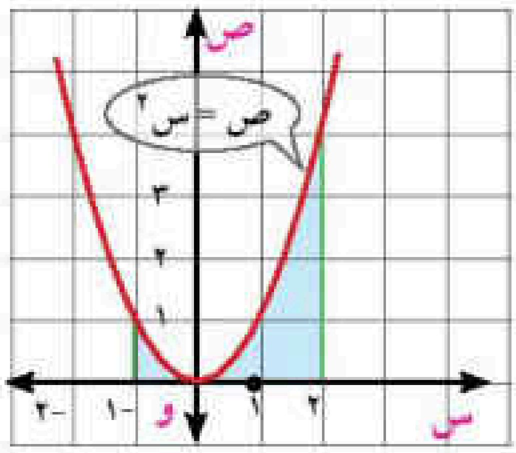
تمارين ٣ - ٤

اكتب التكامل المحدد الذى يعطى المساحة الملونة فى كل مما يأتى واحسب قيمته.

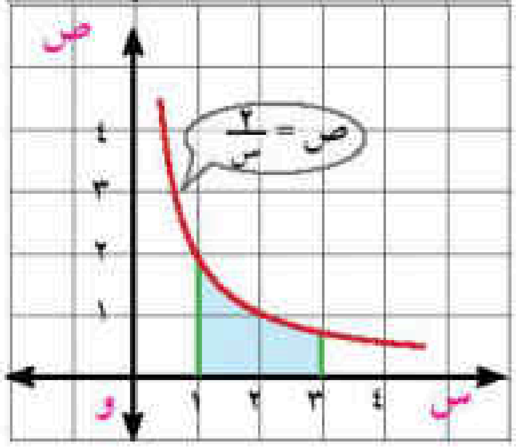
١



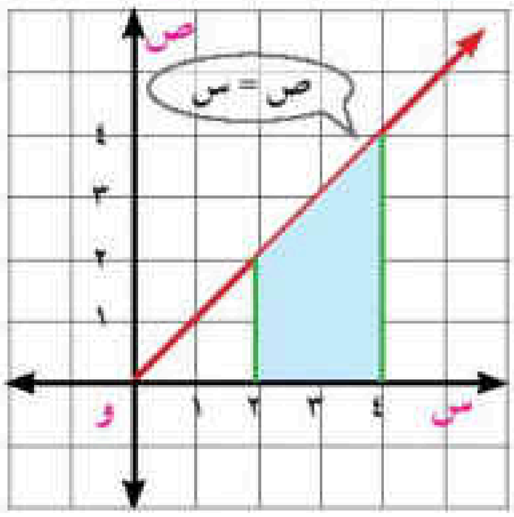
٢



٣



٤



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

٥ مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = س، س = ٢ ، ص = ٠ : تساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب ١

ج ٢ د ٤

٦ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} والمستقيمات ص = ٠، س = ٢ تساوى

أ ٨ ب ٤ ج ٢ د ١

٧ حجم الجسم الناشيء من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٢$\sqrt{س}$ ، ص = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

أ - π ب ٠ ج π د ٢ π

٨ حجم الجسم الناشيء من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{س + ١}$ والمستقيمات ص = ٠ ، س = -١، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات يساوى

أ $\frac{٣ \pi}{٢}$ ب $\frac{٥ \pi}{٢}$ ج π د ٢ π

فى كل مما يأتى إحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

٩ المنحنى ص = ٥ - س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١

(١٠) المستقيمات: س + ٢ص = ٩ ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠

(١١) المنحنى ص = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ والمستقيمات س = ٠ ، س = ٥ ، ص = ٠

(١٢) المنحنى ص = ٣ - ٢س - $\text{س}^{٢}$ ومحور السينات

(١٣) المنحنى ص = $\frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

(١٤) منحنى الدالة د: د(س) = (٣ - س) $(\text{س} - ١)^{٢}$ ومحوري الاحداثيات حيث د(س) ≥ ٠

(١٥) منحنى الدالة د: د(س) = (س - ١) (س - ٢) (س - ٣) والمستقيمين س = ٤، ص = ٠ حيث د(س) ≥ ٠

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى:

(١٦) ص = س ، س = ٣ ، ص = ٠

(١٧) ص = ٣ - س ، س = ٠ ، ص = ٠

(١٨) ص = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

(١٩) ص = |س| ، س = -٢ ، س = ٤ ، ص = ٠